CPE 332
Computer Engineering Mathematics II

Part III, Chapter 11
Numerical Differentiation and Integration

Today Topics

- Chapter 11 Numerical Differentiation and Integration
  - Derivative Approximation
    - Forward, Backward, Centered Difference
    - High Order Derivative
    - High Accuracy Approximation
  - Integral Approximation
    - Polynomial
      - Zero Order
      - First Order (Trapezoidal)
      - Second Order (Simpson 1/3)
      - Third Order (Simpson 3/8)
    - More Accurate Method
      - Richardson Extrapolation

9.2 Taylor's Theorem

ทฤษฎีบท

ถ้า Function f และค่า $n+1$ Derivative แรกของมันมีความต่อเนื่องในช่วงของ a และ x ดังนั้นค่าของ Function ที่จุด x สามารถแสดงได้โดย

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n$$

โดย R_n เรียก Remainder และให้นิยามว่าเป็น

$$R_n = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

ซึ่งค่าของ Remainder ดังกล่าวยังสามารถเขียนในรูปที่เรียก Derivative Form หรือ Lagrange Form ดังนี้

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

สมการข้างบนรู้จักกันในนาม Taylor Series หรือ Taylor's Formula ซึ่งถ้าไม่รวม R_n สมการที่เหลือก็คือค่าประมาณของ $f(x)$ ที่มีลักษณะเป็น Polynomial กล่าวอีกนัยหนึ่งก็คือ ค่าของ Function ใดๆที่มีคุณสมบัติตามที่กำหนด สามารถประมาณได้จากสมการของ Polynomial

การละเทอม R_n ออกจากสมการ จะส่งผลให้การคำนวณค่าประมาณนั้นมี Error นี่คือที่มาของ Truncation Error ที่เรากล่าวในบทที่ 7 ดังนั้นการหาค่าของ Function ขึ้นอยู่ว่าเราต้องการ Significant Digit แค่ไหน ซึ่งจะเป็นตัวจะกำหนดว่าเราต้องใช้กี่เทอมใน Polynomial และจะลงเอยด้วย Degree ของ Polynomial และ Derivative ของ Function ที่จุด a ที่ต้องใช้

ถ้าให้ a เป็นจุดของ Function ที่เรารู้ค่าของมัน และ Derivative ของมัน และสมมุติว่าอยู่ที่ x_i เราสามารถใช้ Taylor Series ประมาณค่าของ Function ที่จุดใหม่ กล่าวคือ x_{i+1} โดยกำหนดขนาดของ Step $h = x_{i+1} - x_i$ ให้มีค่าเท่าๆกัน เช่น

$$Zero-Order\ Approximation: f(x_{i+1}) \cong f(x_i)$$

$$First-Order\ Approximation: f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h$$

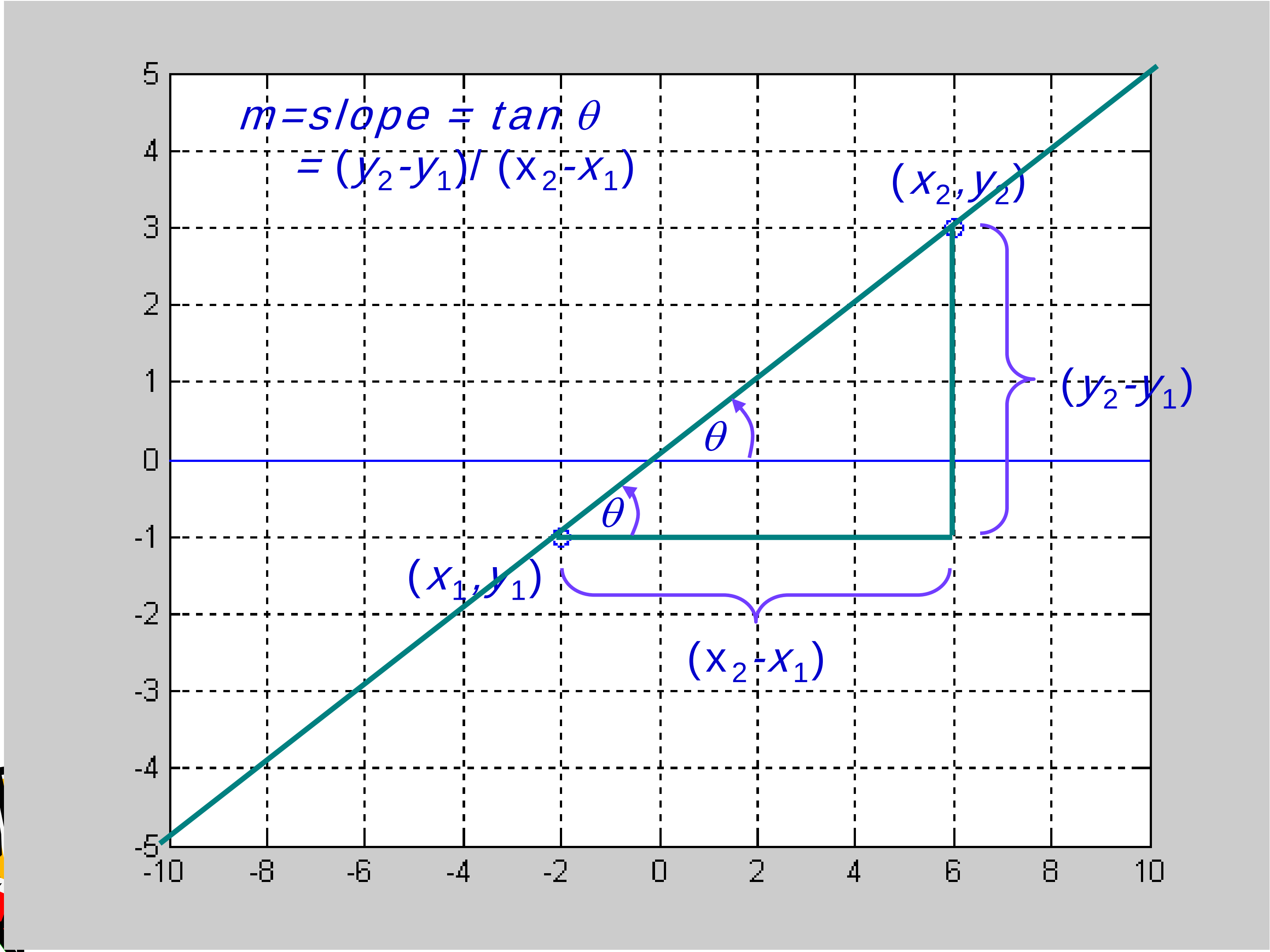
$$Second-Order\ Approximation: f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2$$

และโดยทั่วไปเราสามารถเขียน

$$n-Order\ Approximation: f(x_{i+1}) \cong f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n$$

โดยที่ค่า Remainder สามารถแสดงได้เป็น $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}$

Slope of Line



Definition of Derivative

- Derivative of *f*(*x*) at any point *x* is the slope of the tangent line at that point (*x*,*f*(*x*))
- Mathematically

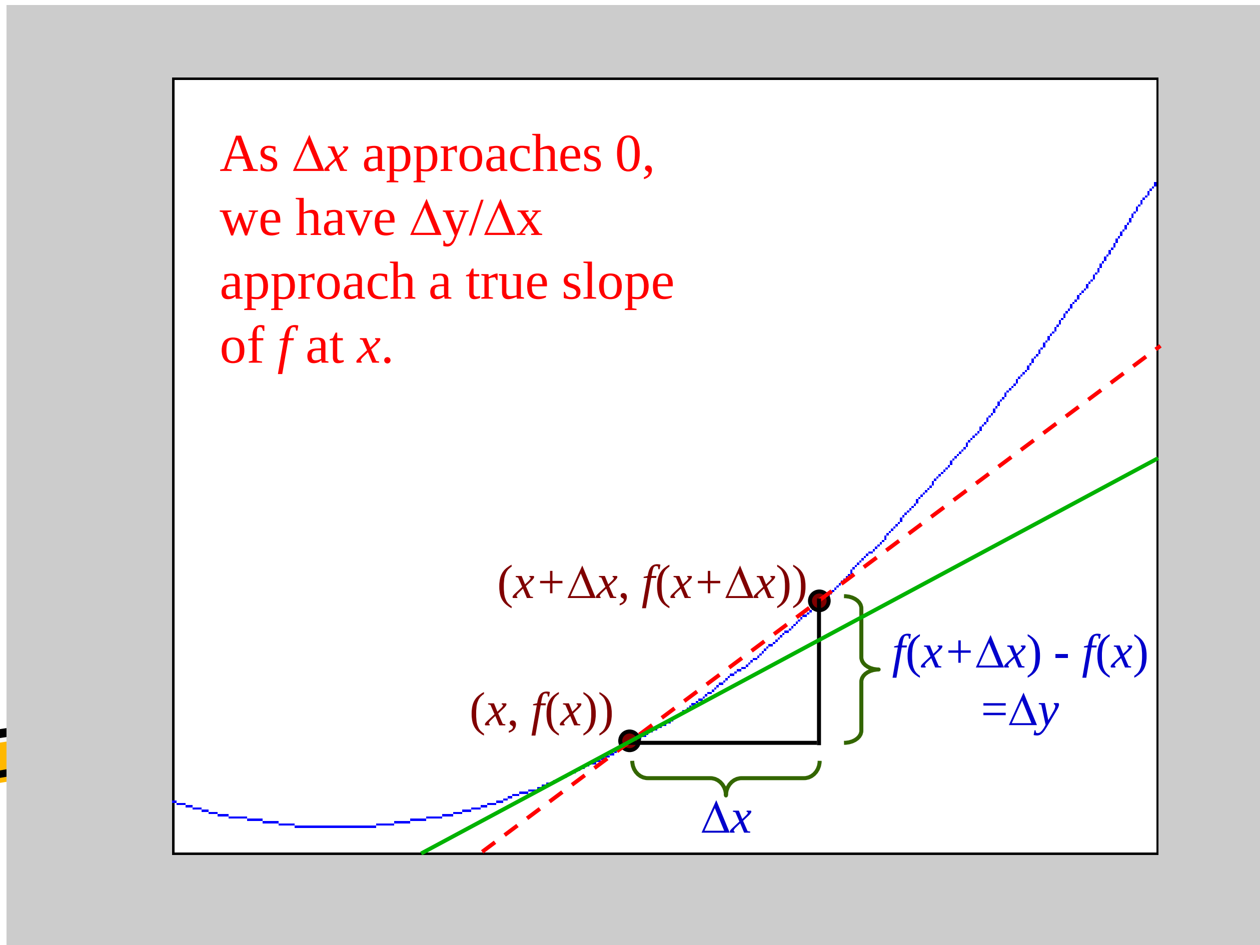
$$\text{Derivative of } f(x) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- For function *y*=*f*(*x*), derivative of function is written in many forms

$$f'(x),\ y',\ \frac{dy}{dx} \text{(read 'dee - y dee - x') or } \dot{y}$$

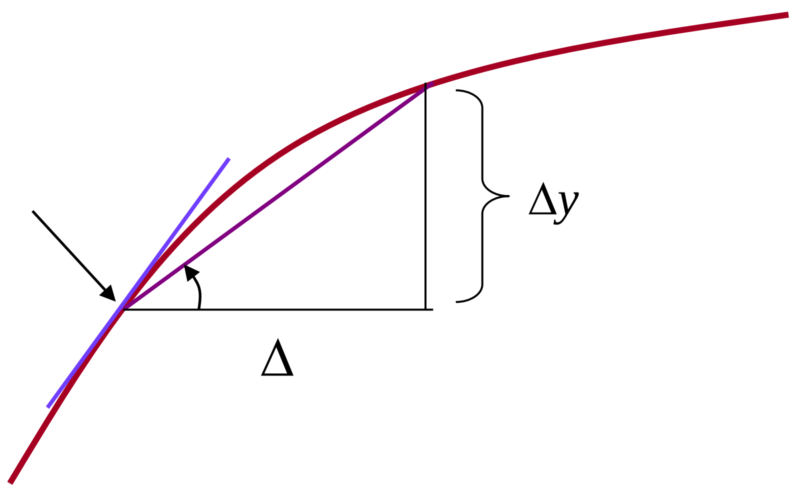
Approximation of slope at point *x* using secant line

- Slope at 'x' $\cong [f(x+\Delta x) - f(x)] / \Delta x = \Delta y / \Delta x$



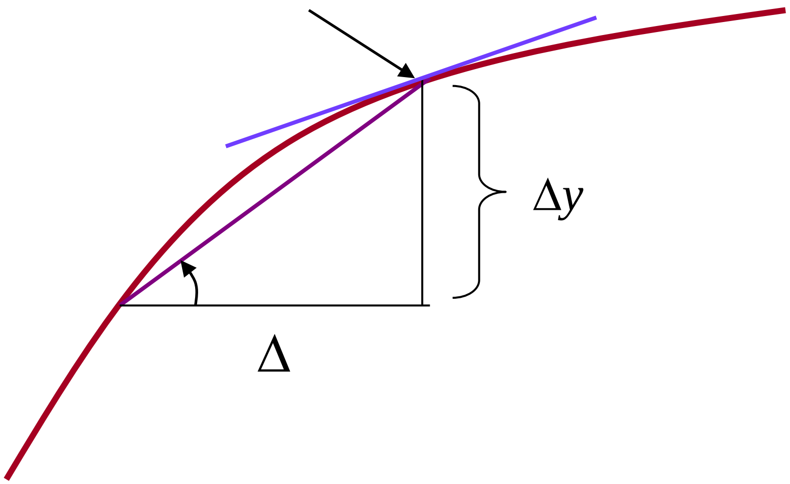
Derivative(Forward)

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x)}{\Delta}$$



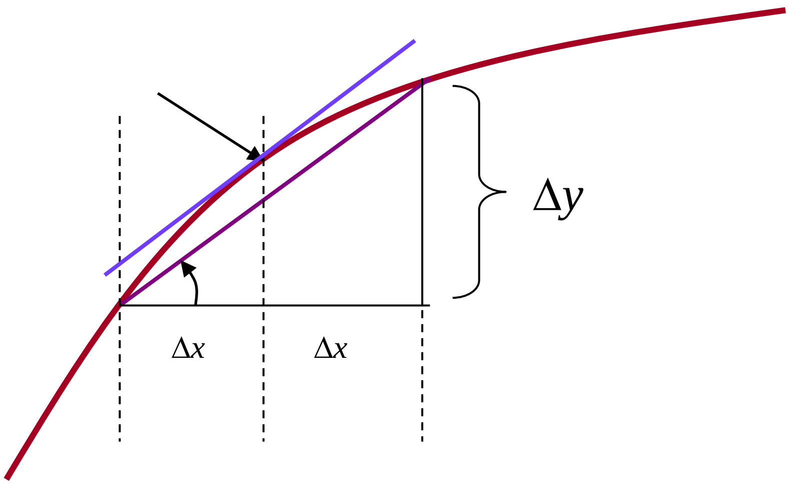
Derivative(Backward)

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x) - f(x - \Delta)}{\Delta}$$



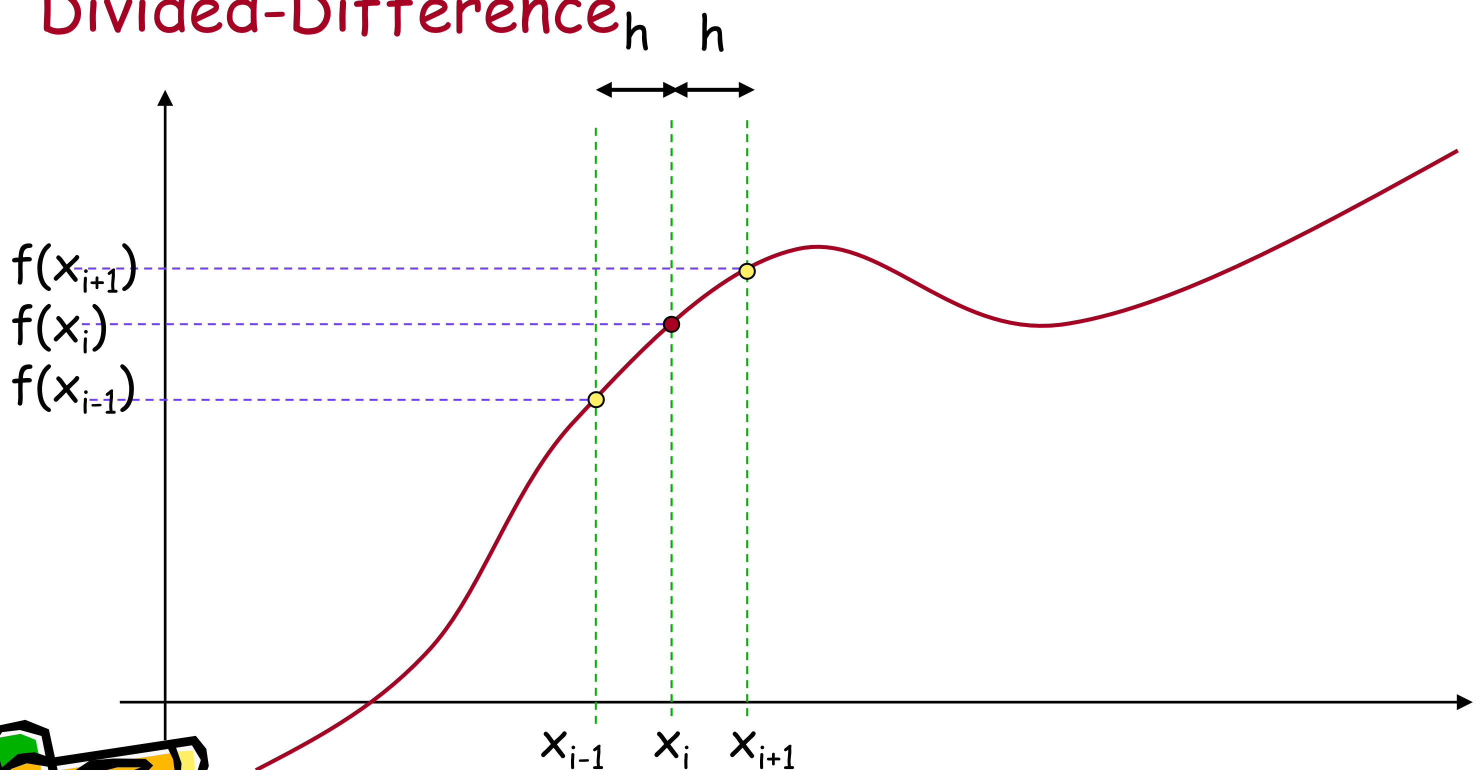
Derivative(Central)

$$f'(x) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta) - f(x-\Delta)}{2\Delta}$$



Introduction

- ในทางปฏิบัติ เราได้ Sample ของ Data เป็นจุด การหา Derivative ก็คือการลบค่าของจุด Data ที่อยู่ติดกันและหารด้วยระยะห่างระหว่างจุด นี่คือวิธีการของ Finite Divided-Difference



Finite Divided-Difference

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

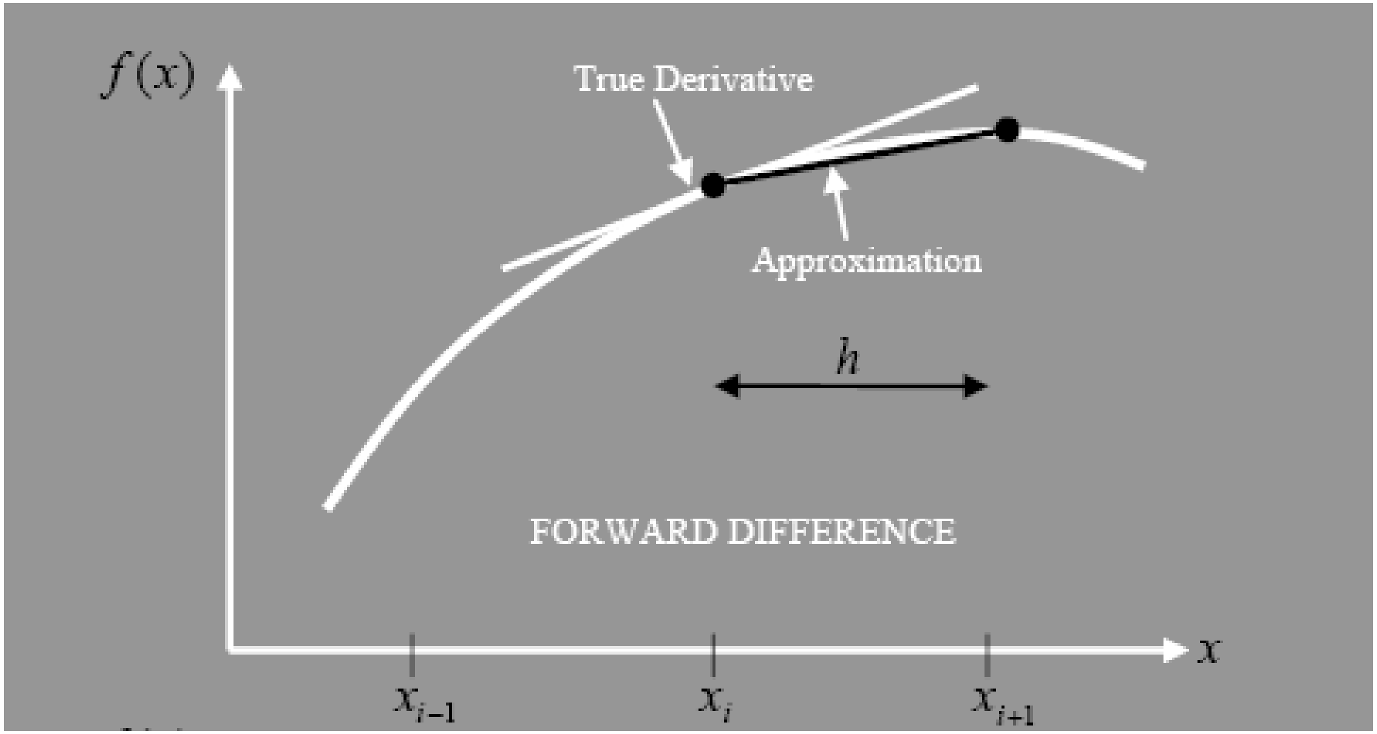
ในกรณีของ First Order เราได้

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + R_1$$

และถ้าเรียงสมการใหม่ หาค่า $f'(x_i)$ เราได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{R_1}{h}$$

: First Forward Difference


$f(x)$
True Derivative
Approximation
h
FORWARD DIFFERENCE
x
x_{i-1}
x_i
x_{i+1}

Finite Divided-Difference

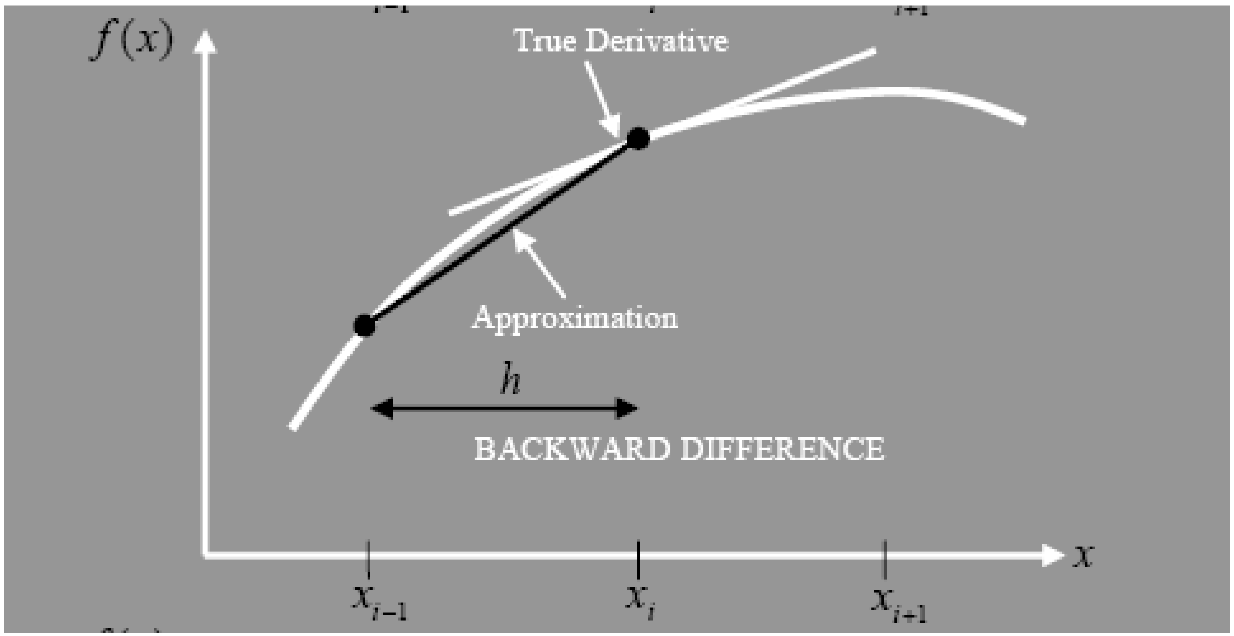
ทำนองเดียวกัน Taylor Series Expansion สามารถ Expand ย้อนหลัง และเขียนได้ในรูปของ

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \cdots$$

สำหรับ First Order Expansion เมื่อจัดเรียงใหม่เราได้

$$f'(x_i) \cong \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h} = \frac{\nabla f_i}{h}$$: **First Backward Difference**

ซึ่งเราเรียก First Backward Difference เพราะเราใช้ค่าก่อนหน้านี้ของ $f(x_{i-1})$ มาคำนวณ



$f(x)$
True Derivative
Approximation
h
BACKWARD DIFFERENCE
x
x_{i-1}
x_i
x_{i+1}

Finite Divided-Difference

วิธีที่สามในการประมาณค่า Derivative เรียก Centered หรือ Central Difference คือใช้สมการ Taylor Series ใน Backward Expansion นำไปหักลบออกจากสมการของ Forward Expansion และจัดเรียงสมการเราได้

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_i)}{n!}h^n + R_n$$

$$f(x_{i-1}) = f(x_i) - f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2}h^2 + \cdots$$

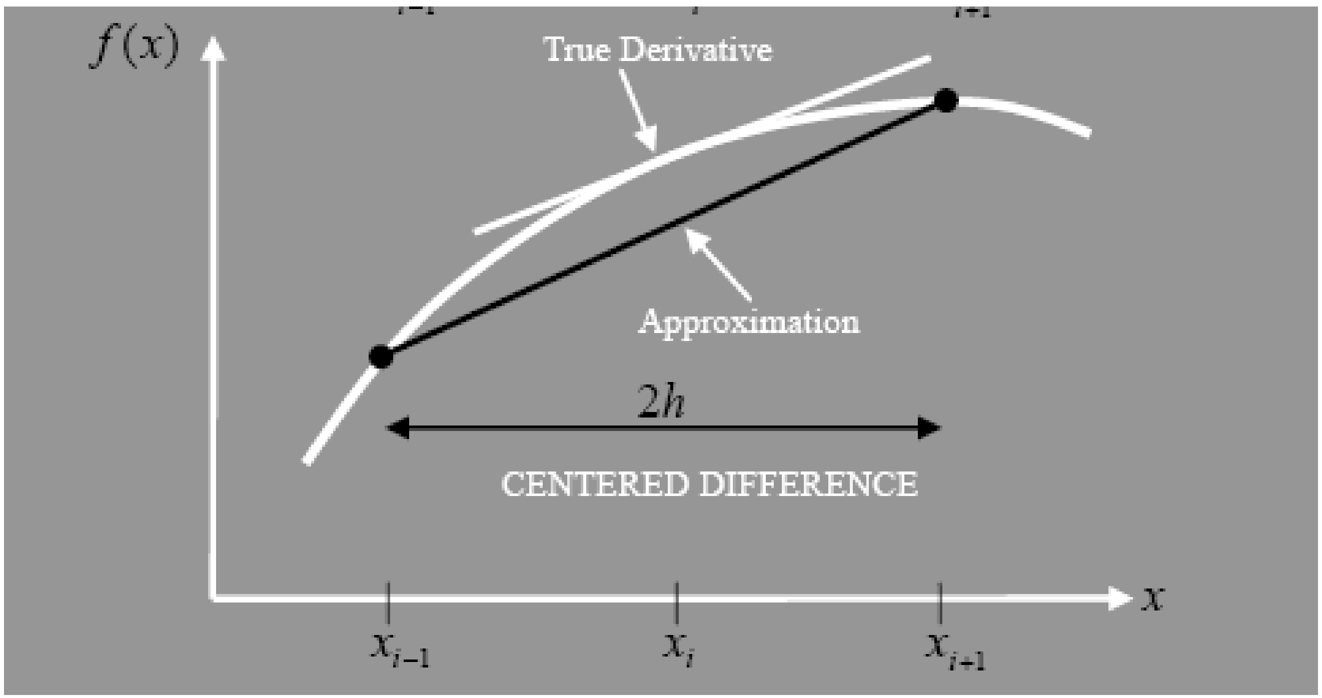
$$f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}) = 2f'(x_i)h + 2\frac{f'''(x_i)h^3}{3!} + \ldots$$

หรือ

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h} + O(h^2)$$

: First Central Difference

จะเห็นได้ว่า Central Difference จะมี Truncation Error เป็น $O(h^2)$ ในขณะที่ Forward และ Backward Difference จะมี Error เป็น Order ของ $O(h)$ ซึ่งจะให้คำตอบที่ถูกต้องกว่า



$f(x)$
True Derivative
Approximation
$2h$
CENTERED DIFFERENCE
x
x_{i-1}
x_i
x_{i+1}

Second Derivative

$$f(x_{i+2}) = f(x_i) + f'(x_i)(2h) + \frac{f''(x_i)}{2!}(2h)^2 + \cdots +$$

และ

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + \cdots$$

เมื่อคูณสมการล่างด้วย 2 และหักลบออกจากสมการบนเราได้

$$f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) = -f(x_i) + f''(x_i)h^2 + \cdots$$

และเมื่อจัดเรียงใหม่เราได้

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

Second Forward Finite Difference

Second Derivative

ทำนองเดียวกันสำหรับ Backward Difference และ Central Difference โดยใช้วิธีคล้ายกับที่กล่าวมา ซึ่งขอให้นักศึกษาลองทำเป็นการบ้าน เราได้

$$f''(x_i) = \frac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2} + O(h)$$

Second Backward Finite Difference

และ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2} + O(h^2)$$

Second Central Finite Difference

High Accuracy Finite Divided-Difference

$$f(x_{i+1}) = f(x_i) + f'(x_i)h + \frac{f''(x_i)}{2!}h^2 + R_2$$

เมื่อจัดเรียงใหม่เราได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f''(x_i)}{2}h + O(h^2)$$

คราวนี้ถ้าเราแทนค่า Second Derivative ด้วนค่าประมาณที่เราหาได้ก่อนหน้านี้คือ

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2} + O(h)$$

High Accuracy Finite Divided-Difference

เราได้

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h} - \frac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

เมื่อจัดเรียงสมการใหม่ เราได้

$$f'(x_i) = \frac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h} + O(h^2)$$

สังเกตว่าการเพิ่มเทอมที่เป็น Second Derivative จะเพิ่มความถูกต้องของคำตอบเป็น $O(h^2)$ แต่เราต้องใช้จุด สามจุด ของ $f(x_i), f(x_{i+1}), f(x_{i+2})$ และเราสามารถทำได้คล้ายๆกันนี้ในกรณีของ Backward Difference และ Central Difference ในตารางถัดไปเป็นการสรุปการหา Derivative ตั้งแต่ First Order จนถึง Forth Order Derivative โดยเพิ่มจำนวนเทอมของ Taylor Series Expansion ในการคำนวณ นั่นก็คือเพิ่มจุดที่ใช้ในการคำนวณค่าประมาณ

Summary

Type	Equation	Error
Forward	$f'(x_i) \cong \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h}$	$O(h)$
Forward	$f'(x_i) \cong \dfrac{-f(x_{i+2}) + 4f(x_{i+1}) - 3f(x_i)}{2h}$	$O(h^2)$
Forward	$f''(x_i) \cong \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^2}$	$O(h)$
Forward	$f''(x_i) \cong \dfrac{-f(x_{i+3}) + 4f(x_{i+2}) - 5f(x_{i+1}) + 2f(x_i)}{h^2}$	$O(h^2)$
Forward	$f'''(x_i) \cong \dfrac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3}$	$O(h)$
Forward	$f'''(x_i) \cong \dfrac{-3f(x_{i+4}) + 14f(x_{i+3}) - 24f(x_{i+2}) + 18f(x_{i+1}) - 5f(x_i)}{h^3}$	$O(h^2)$
Forward	$f^{(4)}(x_i) \cong \dfrac{f(x_{i+4}) - 4f(x_{i+3}) + 6f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + f(x_i)}{h^4}$	$O(h)$
Forward	$f^{(4)}(x_i) \cong \dfrac{-2f(x_{i+5}) + 11f(x_{i+4}) - 24f(x_{i+3}) + 26f(x_{i+2}) - 14f(x_{i+1}) + 3f(x_i)}{h^4}$	$O(h^2)$

Summary

Backward	$f'(x_i) \cong \dfrac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h}$	$O(h)$
Backward	$f'(x_i) = \dfrac{3f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{2h}$	$O(h^2)$
Backward	$f''(x_i) \cong \dfrac{f(x_i) - 2f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^2}$	$O(h)$
Backward	$f''(x_i) \cong \dfrac{2f(x_i) - 5f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^2}$	$O(h^2)$
Backward	$f'''(x_i) \cong \dfrac{f(x_i) - 3f(x_{i-1}) + 3f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{h^3}$	$O(h)$
Backward	$f'''(x_i) \cong \dfrac{5f(x_i) - 18f(x_{i-1}) + 24f(x_{i-2}) - 14f(x_{i-3}) + 3f(x_{i-4})}{h^3}$	$O(h^2)$
Backward	$f^{(4)}(x_i) \cong \dfrac{f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + 6f(x_{i-2}) - 4f(x_{i-3}) + f(x_{i-4})}{h^4}$	$O(h)$
Backward	$f^{(4)}(x_i) \cong \dfrac{3f(x_i) - 14f(x_{i-1}) + 26f(x_{i-2}) - 24f(x_{i-3}) + 11f(x_{i-4}) - 2f(x_{i-5})}{h^4}$	$O(h^2)$

Summary

Central	$f'(x_i) \cong \dfrac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}$	$O(h^2)$
Central	$f'(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 8f(x_{i+1}) - 8f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{12h}$	$O(h^4)$
Central	$f''(x_i) \cong \dfrac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1})}{h^2}$	$O(h^2)$
Central	$f''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+2}) + 16f(x_{i+1}) - 30f(x_i) + 16f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{12h^2}$	$O(h^4)$
Central	$f'''(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 2f(x_{i+1}) + 2f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}{2h^3}$	$O(h^2)$
Central	$f'''(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 8f(x_{i+2}) - 13f(x_{i+1}) + 13f(x_{i-1}) - 8f(x_{i-2}) + f(x_{i-3})}{8h^3}$	$O(h^4)$
Central	$f^{(4)}(x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}) - 4f(x_{i+1}) + 6f(x_i) - 4f(x_{i-1}) + f(x_{i-2})}{h^4}$	$O(h^2)$
Central	$f^{(4)}(x_i) = \dfrac{-f(x_{i+3}) + 12f(x_{i+2}) - 39f(x_{i+1}) + 56f(x_i) - 39f(x_{i-1}) + 12f(x_{i-2}) - f(x_{i-3})}{6h^4}$	$O(h^4)$

Numerical Integration

- Newton-Cotes Integration Formula
- Zero-Order Approximation
- First-Order Approximation
  - Trapezoidal Rule
- Second-Order Approximation
  - Simpson 1/3 rule
- Third-Order Approximation
  - Simpson 3/8 rule
- Romberg Integration
  - Richardson Extrapolation
  - Romberg Integration Algorithm

9.4 Newton-Cotes Integration Formulas

สมการของ Newton-Cotes เป็นรูปแบบที่ใช้กันมากที่สุดในการหาค่า Integral แบบ Numerical หลักการคือการเปลี่ยนรูปสมการที่สลับซับซ้อนให้อยู่ในรูปสมการทางคณิตศาสตร์ที่ง่ายในการหาค่า Integrate ในรูปของ Polynomial ดังนี้

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_n(x)dx$$

ซึ่ง $f_n(x)$ เป็น Polynomial มี Order เท่ากับ n และอยู่ในรูป

$$f_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

ก่อนที่จะพูดในรายละเอียดต่อไป ขอให้เราเข้าใจก่อนว่า สำหรับ Variable แค่ตัวเดียว การหาค่า Integrate จากจุด a ถึงจุด b ของ $f(x)$ ความจริงแล้วคือการหาค่าพื้นที่จากจุด $x = a$ ของ Function ที่กวาดบนแกน x จนถึงจุด $x = b$ โดยพื้นที่ที่อยู่เหนือแกน x จะมีค่าเป็นบวก และพื้นที่ที่อยู่ใต้แกน x จะมีค่าเป็นลบ

การนำ Polynomial ไปใช้ เราจำเป็นต้องหาค่า Coefficient โดยการแทนค่าด้วยจุด $[x_i, f(x_i)]$ ที่รู้ และแก้สมการ Linear Equation ออกมา ซึ่งถ้าเราใช้ Polynomial Order สูง การคำนวณจะสลับซับซ้อน๖ช(ดูหัวข้อในบทที่ 8) วิธีที่ง่ายกว่าคือใช้สมการของ Polynomial ที่เขียนในรูปแบบที่ง่ายกว่า ที่เรียก ***Lagrange Interpolating Polynomial*** ดังนี้

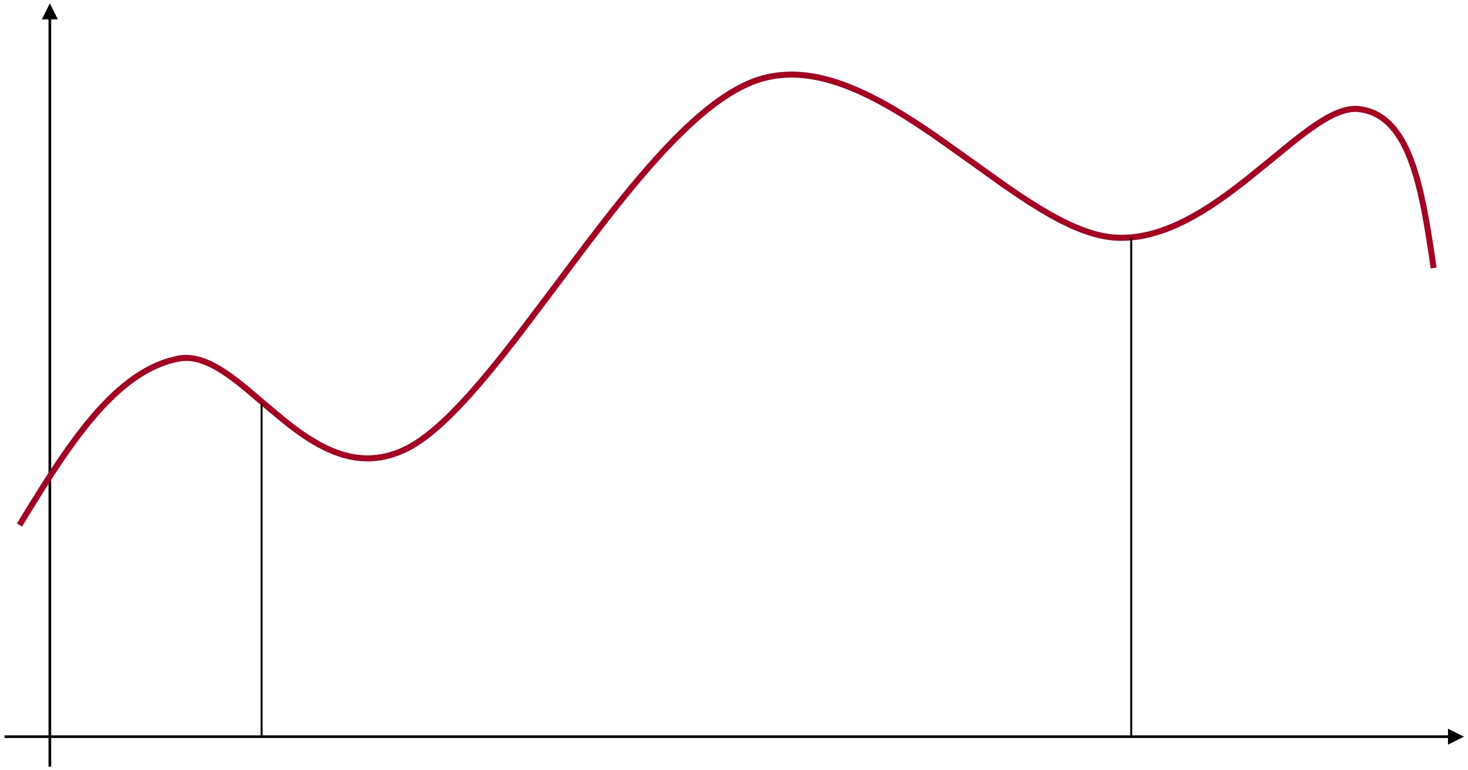
$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

สมการข้างบน แม้ว่าดูจะสลับซับซ้อน แต่จะมีประโยชน์ในการสร้าง Polynomial ที่จะนำไปใช้ โดยไม่ต้องมีการคำนวณค่า Coefficient ของ Polynomial ล่วงหน้า และจะประหยัดการคำนวณได้มาก เราจะนำไปใช้เมื่อเราเริ่มพูดถึง Second Order Polynimial

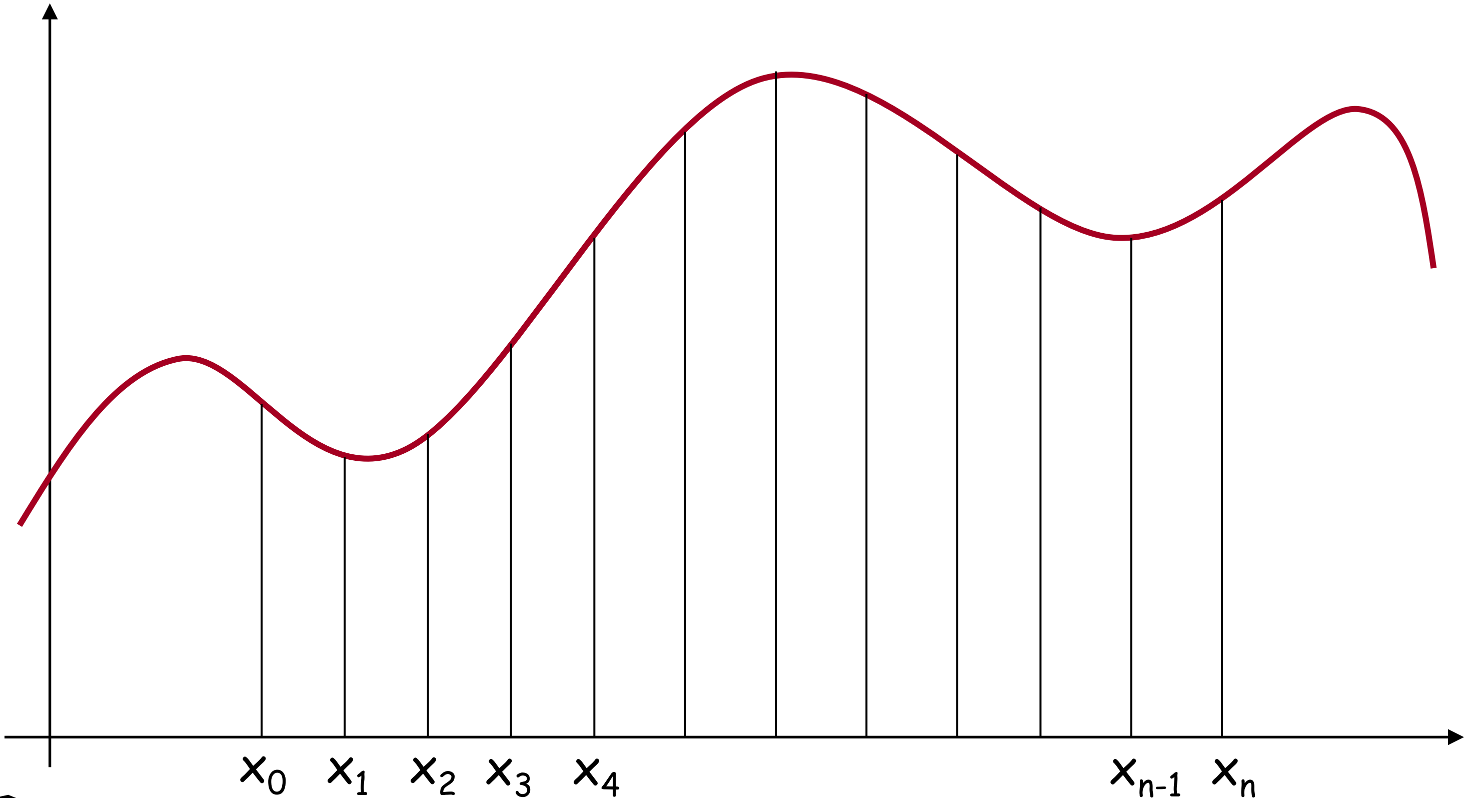
เนื่องจากเป็นการประมาณค่า และ Error ที่เกิดขึ้นจะขึ้นอยู่กับระยะห่างของสองจุด a และ b วิธีการที่จะลด Error ก็คือแบ่งการ Integrate ออกเป็นส่วนที่มีขนาดเล็กหลายๆส่วน ดังนี้

$$I = \int_a^b f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx;\ x_0 = a, x_n = b$$

Integral Approximation



Integral Approximation



Zero-Order Approximation

9.4.1 Zero-Order Approximation

วิธีนี้เป็นวิธีการประมาณค่า Integrate ตั้งแต่สมัยก่อนที่จะมีคอมพิวเตอร์ ซึ่งเราได้ $f_0(x) = a_0$ ดังนั้นค่า Integral ที่ประมาณได้จะเท่ากับ

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b a_0 dx = a_0[b-a]$$

ค่า a_0 อาจจะใช้ค่าเท่ากับ $f(a)$ หรือ $f(b)$ แต่ที่ให้ค่า Error ต่ำสุดจะหาได้จากจุดของ Function ที่อยู่กึ่งกลางระหว่าง a และ b กล่าวคือ

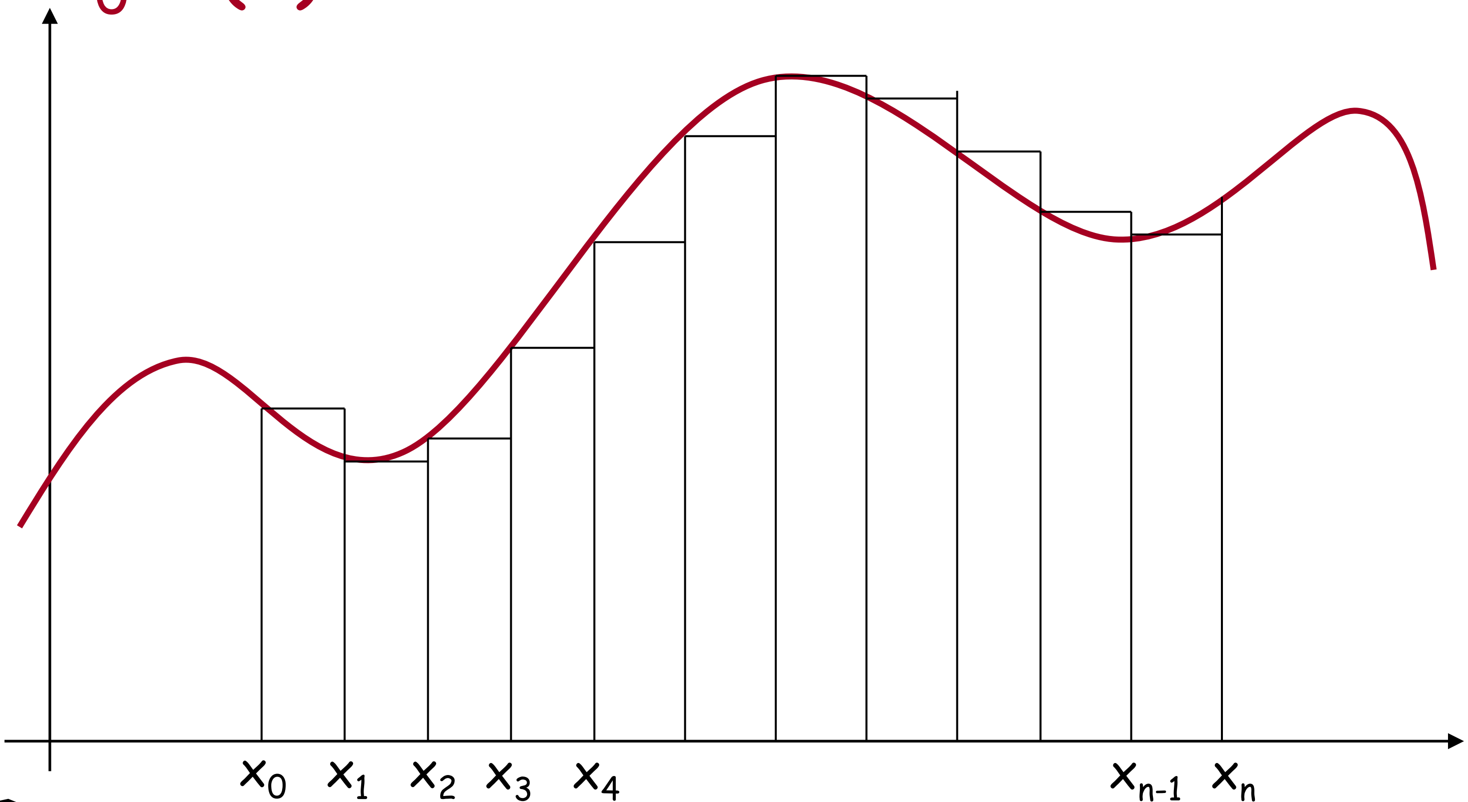
$$a_0 = f(\tfrac{a+b}{2})$$

รูปข้างล่างแสดงถึงวิธีการหาค่า Integrate ด้วยวิธีนี้ และรูปถัดไปแสดงการประมาณค่า Integral ของ Function โดยเพิ่มความถูกต้องด้วยการแบ่งการคำนวณออกเป็นส่วนที่เล็กกว่าและมี Error น้อยกว่า

วิธีการนี้เรียกอีกอย่างหนึ่งว่า Strip Method คือเราแบ่งพื้นที่ออกเป็นแถบของสี่เหลี่ยมผืนผ้า และประมาณค่าพื้นที่โดยคำนวณจากพื้นที่ของสี่เหลี่ยมผืนผ้าที่ได้

Zero-Order Approximation

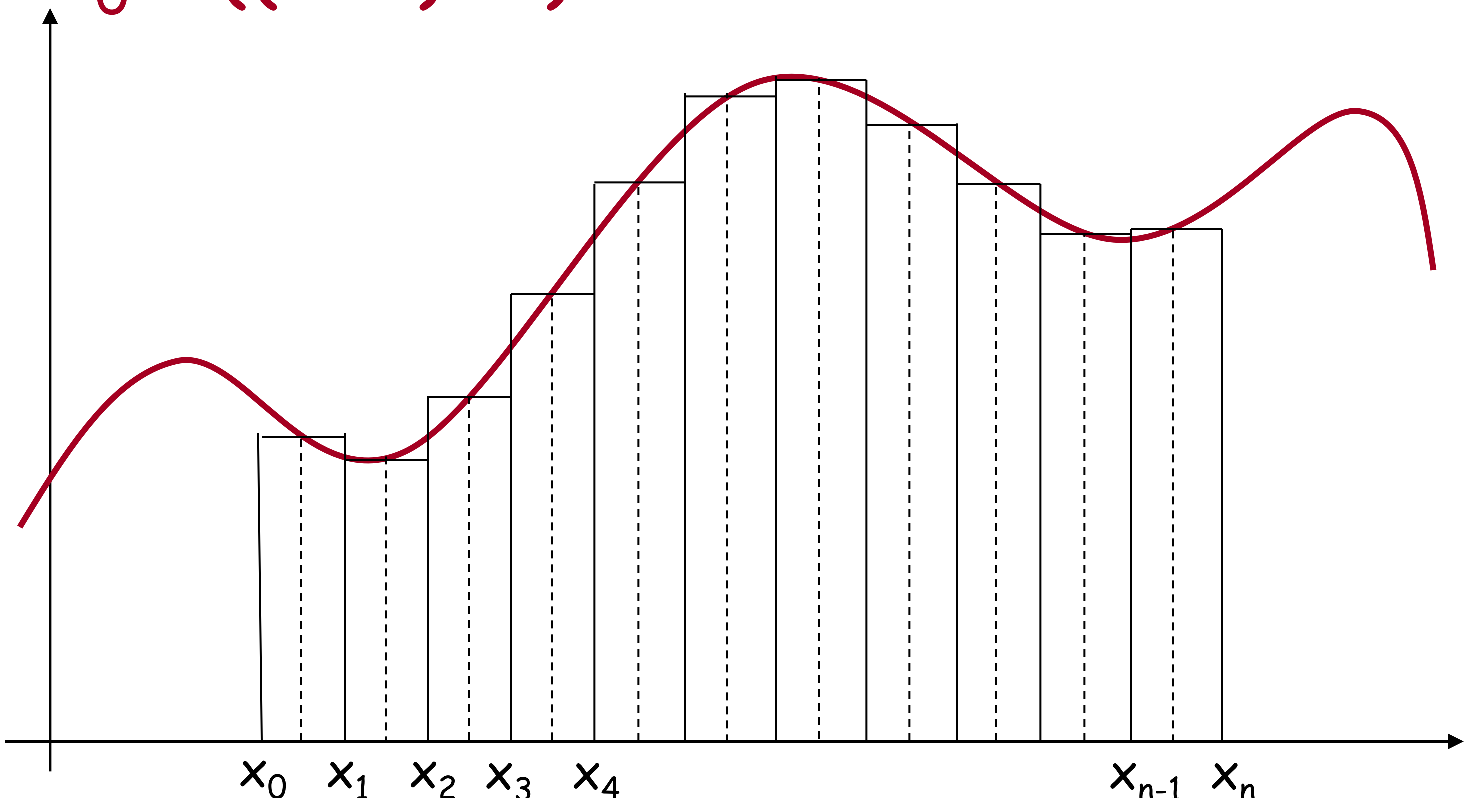
- $a_0 = f(a)$



$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b a_0 dx = a_0[b-a] = f(a)[b-a]$$

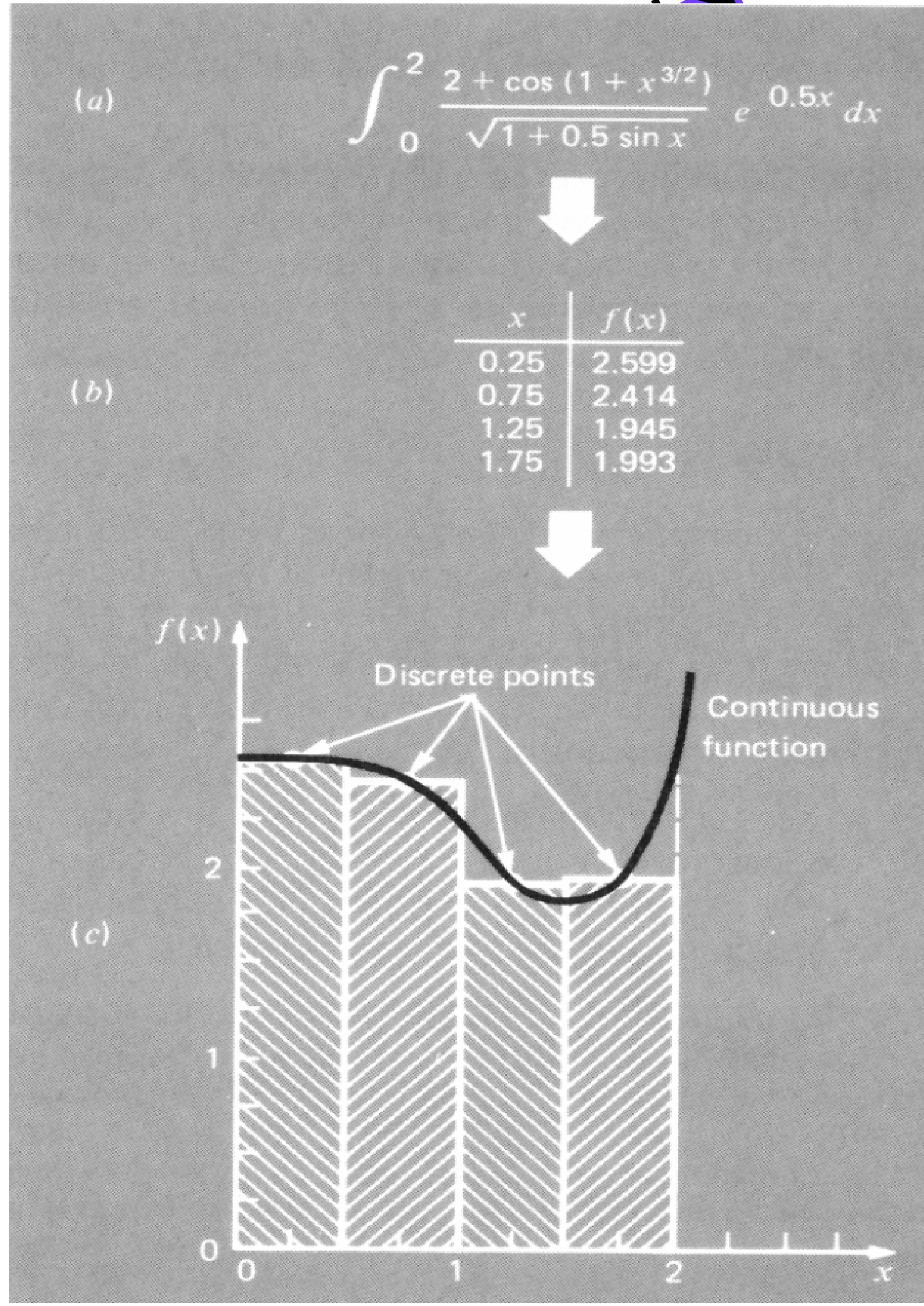
Zero-Order Approximation

- $a_0 = f((a+b)/2)$

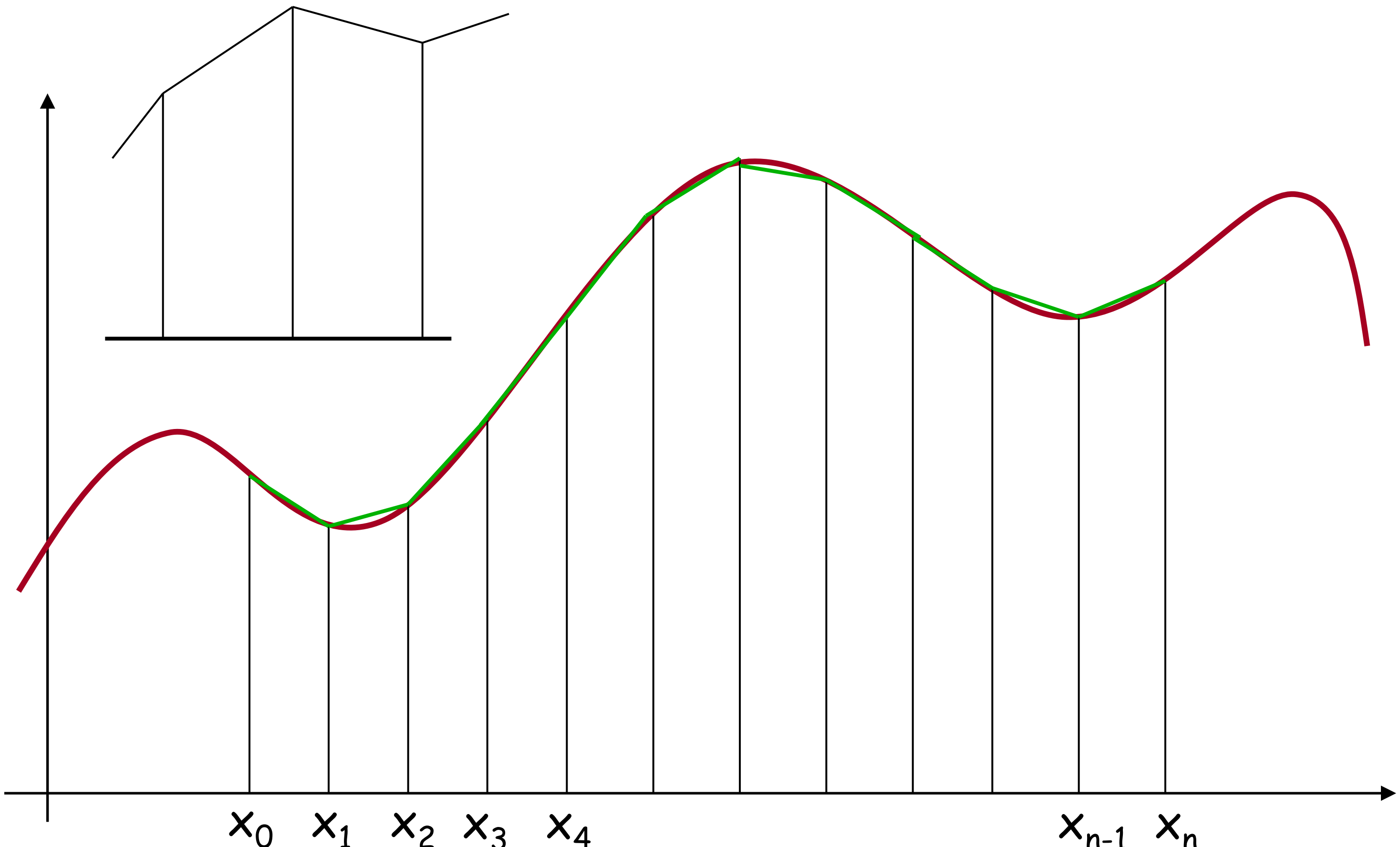


$$I = \int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b a_0 dx = a_0[b-a] = f(\frac{a+b}{2})[b-a]$$

Zero-Order Approximation



First-Order Approximation



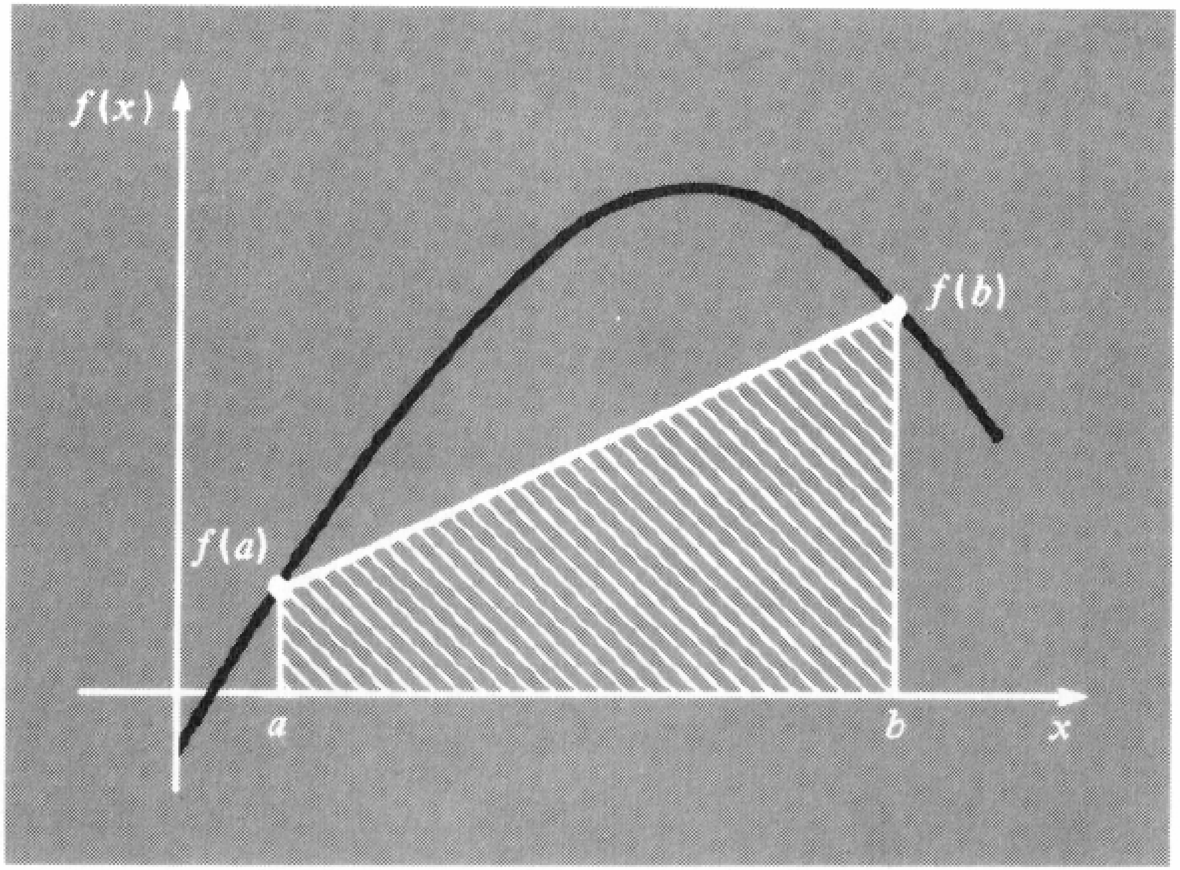
First-Order Approximation

9.4.2 First-Order Approximation: Trapezoidal Rule

ในกรณีที่ Polynomial เป็น First-Order ในรูปของ $f_1(x) = a_0 + a_1 x$ ซึ่งคือสมการเส้นตรง สมการเส้นตรงที่เหมาะสมคือเส้นตรงที่ลากจากจุด a ไปยังจุด b ดังนั้นสมการสามารถเขียนได้เป็น(ดูรูป และจากสมการเส้นตรง $y = a + bx$)

ดังนั้นสมการประมาณค่าจะได้เป็น

First-Order Approximation



$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right] dx$$

$$= (b - a)\left[\frac{f(a) + f(b)}{2} \right]$$

: **Trapezoidal Rule**

First-Order Approximation

การนำสมการเส้นตรงมาประมาณค่าของ Function จะยังผลให้เกิด Truncation Error ซึ่งเราสามารถพิสูจน์ได้จาก Newton-Gregory Interpolating Polynomial(รายละเอียดจะไม่กล่าวถึง) ว่าค่าของ Error สำหรับ Trapezoidal Rule จะอยู่ในรูป

$$E_t = -\frac{1}{12} f''(\xi)(b-a)^3$$

โดยที่ค่า ξ จะมีค่าอยู่ระหว่าง a และ b

Example 9.5 ตัวอย่างของ Single-Application ของ Trapezoidal Rule จงทำการประมาณค่า Integral ของ

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วงจาก $a = 0$ จนถึง $b = 0.8$ โดยใช้ Trapezoidal Rule จากนั้นคำนวณค่า True Error

Answer:

เราได้ $\int_0^{0.8} f(x)dx = \left[0.2x + 25x^2/2 - 200x^3/3 + 675x^4/4 - 900x^5/5 + 400x^6/6\right]_0^{0.8}$

และคำตอบที่แท้จริงเท่ากับ 1.64053334

เราหาค่า $f(0) = 0.2, \quad f(0.8) = 0.232$

ดังนั้น จาก Trapezoidal Rule เราได้ $I \cong 0.8\dfrac{0.2 + 0.232}{2} = 0.1728$

และ $E_t = 1.64053334 - 0.1728 = 1.46773334, \quad e_t = 89.5\%$

Trapezoidal Rule

จากที่กล่าวมาแล้ว ค่าของ Error สามารถทำให้ลดลงได้ โดยการแบ่งการ Integration เป็นส่วนเล็กๆที่ต่อเนื่องกัน ถ้าเราแบ่งช่วงการ Integration ออกเป็น $n+1$ จุดที่มีระยะห่างเท่ากับ เท่ากับ h และเราจะได้ n Segment ดังนั้น

$$h = \frac{b-a}{n}$$

โดยทั้ง $n+1$ จุดเริ่มนับจาก $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ซึ่งจุดเริ่มต้นเราให้ $x_0 = a$ และจุดสุดท้าย $x_n = b$ เราจะได้สมการของ Trapezoidal Rule เป็น

$$I \cong h\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + h\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + h\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}$$

สรุปแล้ว เราจะได้

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0)+f(x_n)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$ **: Trapezoidal Rule**

Trapezoidal Rule

$$I \cong \frac{h}{2}\left[f(x_0) + f(x_n) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$: **Trapezoidal Rule**

และค่า Estimate Error สามารถแสดงได้ว่าอยู่ในรูป

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{2n^2}\overline{f''}$$

โดยที่ $\overline{f''}$ คือค่าเฉลี่ยของ Second Derivative ของ Function ในช่วง a ถึง b

Example 9.6 ตัวอย่างของ Multiple-Application ของ Trapezoidal Rule จงทำการประมาณค่า Integral ของ

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วงจาก $a = 0$ จนถึง $b = 0.8$ โดยใช้การแบ่งเป็นสอง Segment จากนั้นคำนวณค่า True Error

Answer:

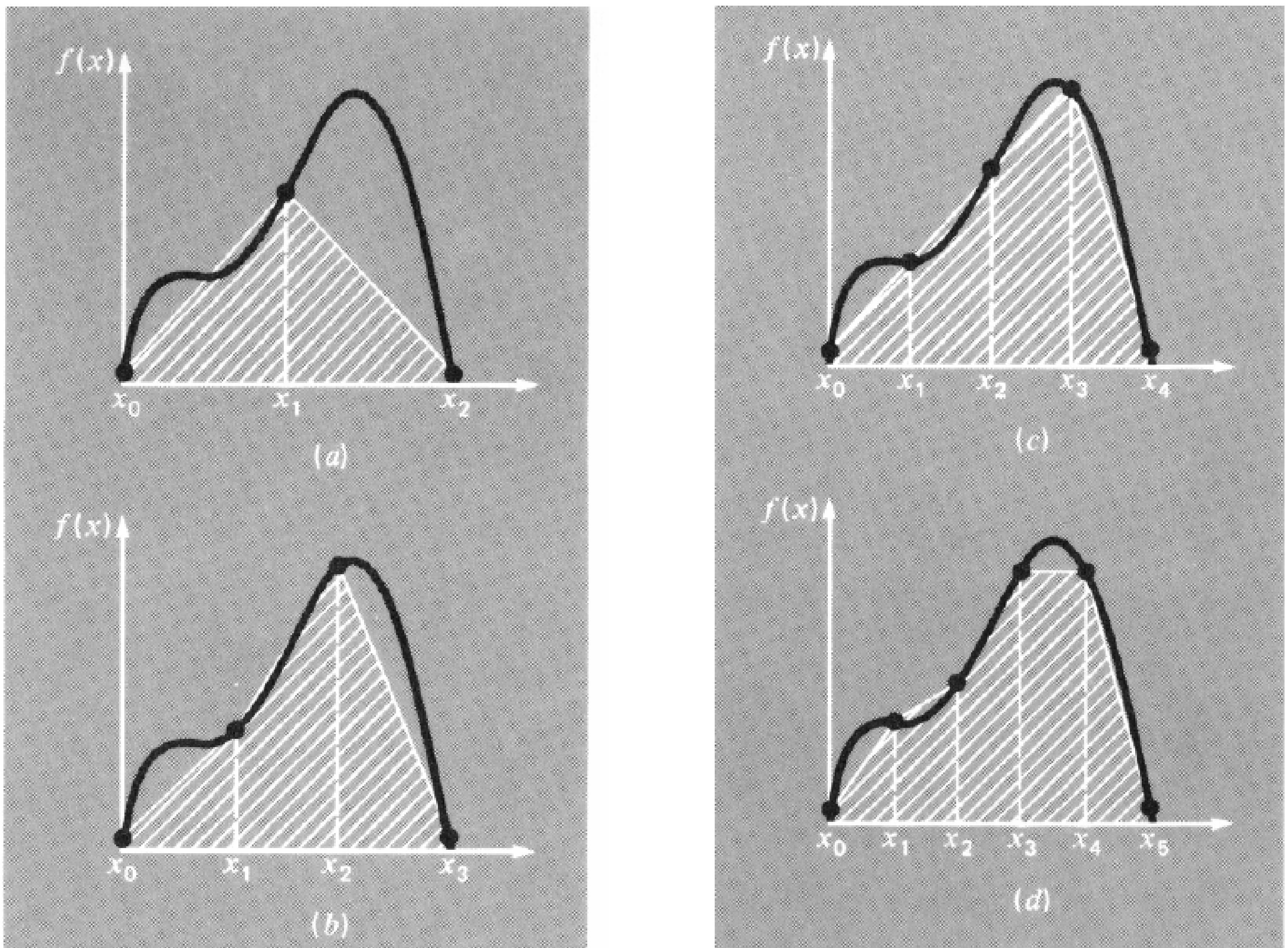
เราหาค่า $f(0) = 0.2, \quad f(0.4) = 2.456, \quad f(0.8) = 0.232$

ดังนั้น $I \cong \frac{0.4}{2}[0.2 + 2(2.456) + 0.232] = 1.0688$

เราได้ $E_t = 1.64053334 - 1.0688 = 0.57173,\ \varepsilon_t = 34.9\%,\ E_a = -\frac{0.8^3}{12(2)^2}(-60) = 0.64$

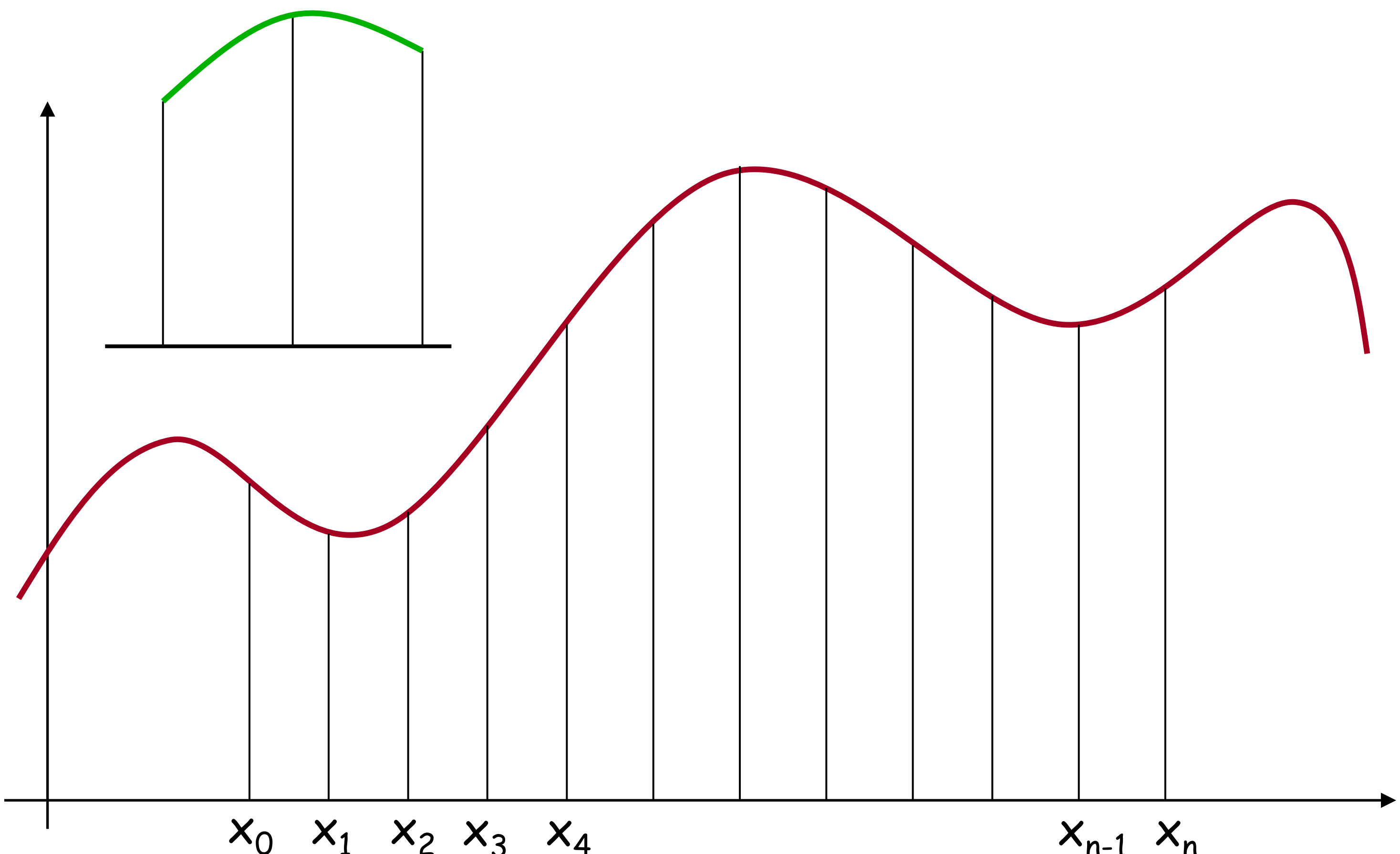
ค่า -60 คือค่าเฉลี่ยของ Second Derivative หาได้จากการ Integrate ของ Second Derivative ในช่วง [0,0.8] และหารด้วยช่วงที่ Integrate หรือ $\overline{f''} = \frac{1}{(0.8-0)}\int_0^{0.8} f''(x)dx$ ขอให้นักศึกษาลองทำดูเอง

รูปข้างล่างสาธิต Error ที่เกิดจากการ Approximation โดยแบ่งเป็น 2, 3, 4 และ 5 Segment และตารางข้างล่างแสดงค่า Error ที่ลดลงของ Function นี้ เมื่อเราเพิ่มจำนวน Segment ซึ่งจะสังเกตได้ว่า ถ้าเราเพิ่ม Segment เป็นสองเท่า Error จะลดลงเป็นหนึ่งในสี่โดยประมาณ



n	h	I	e_t, %
1	0.8	0.1728	89.5
2	0.4	1.0688	34.9
3	0.2667	1.3695	16.5
4	0.2	1.4848	9.5
5	0.16	1.5399	6.1
6	0.1333	1.5703	4.3
7	0.1143	1.5887	3.2
8	0.1	1.6008	2.4
9	0.0889	1.6091	1.9
10	0.08	1.6150	1.6

Second-Order Approximation



Simpson's 1/3 Rule

Second-Order Approximation

Simpson's 1/3 Rule ได้จากการประมาณค่าโดยใช้ Second Order Polynomial หรือสมการ Parabola ซึ่งการสร้างสมการ Parabola $f_2(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ นั้น เราจะต้องรู้ค่า Coefficient 3 ตัว ดังนั้นเราจะต้องป้อนจุดของค่า $f(x)$ สามจุดและแก้สมการจึงจะหา a_0, a_1, a_2 นอกจากนี้สมการที่ได้ควรจะเริ่มจาก $f(a)$ และจบลงที่ $f(b)$ ซึ่งจุด a และ b คือสองจุดที่เราต้องใช้ และจุดที่สามปกติจะใช้ที่จุดกึ่งกลาง คือ $(a+b)/2$

ในการนี้ เราต้องคำนวณหา Coefficient ทั้งสามของ a_0, a_1, a_2 สำหรับทุก Segment ที่คำนวณ ซึ่งจะทำให้การประมาณค่าใช้การคำนวณที่มาก วิธีที่ดีกว่าคือเราใช้ Polynomial ในรูปของ Lagrange Interpolating Polynomial ดังที่ได้กล่าวในตอนต้นของบท ซึ่งจะหาได้โดยตรงจากการแทนค่าของ Function 3 จุดในสมการ ดังนี้

$$f_2(x) = \sum_{i=0}^{2} L_i(x) f(x_i), \quad L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{2} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Second-Order Approximation

สมมุติเราแบ่ง Segment ออกเป็น n Segment และจุดเริ่มจาก $x_0, x_1, \ldots, x_n$ โดยที่ระยะห่างแต่ละจุดมีค่าเท่ากันคือเท่ากับ h ซึ่งสมการ Parabola แรกจะผ่านสามจุดแรกของ Function คือ $[x_0, f(x_0)], [x_1, f(x_1)], [x_2, f(x_2)]$ ดูรูปประกอบ

ดังนั้น สมการของ Lagrange Interpolating Polynomial เราจะได้

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) \\
&= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)
\end{aligned}
$$

และการประมาณค่า Integration ของช่วงแรก จาก x_0 ถึง x_2 จะเป็น

$$
I \cong \int_{x_0}^{x_2} \left[\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \right] dx
$$

เมื่อทำ Integration ในสมการข้างบน และจัดเรียงเทอมใหม่ ซึ่งขอให้นักศึกษาลองทำเป็นการบ้าน เราจะได้

$$
I \cong \frac{h}{3}\left[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)\right]
$$

: Simson's 1/3 Rule

Second-Order Approximation

ในกรณีของ Multiple Application โดยเราแบ่งออกเป็น n Segment เริ่มจาก $x_0, x_1, \ldots, x_n$ และค่าประมาณของ Integration จะได้จากผลรวมของค่าประมาณในแต่ละ Segment ดังนี้

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_4} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_n} f(x)dx \\
&\cong 2h\frac{f(x_0)+4f(x_1)+f(x_2)}{6} + 2h\frac{f(x_2)+4f(x_3)+f(x_4)}{6} \\
&\quad + \ldots + 2h\frac{f(x_{n-2})+4f(x_{n-1})+f(x_n)}{6}
\end{aligned}
$$

เมื่อรวมเทอมเข้าด้วยกันเราได้

$$
I \cong (b-a)\frac{f(x_0)+4\sum_{i=1,3,5,\ldots}^{n-1} f(x_i)+2\sum_{i=2,4,6,\ldots}^{n-2} f(x_i)+f(x_n)}{3n}
$$

: Simson's 1/3 Rule

Second-Order Approximation

ในกรณีของ Single Segment นั้น ค่า Error ของ Simson's 1/3 Rule จะดีกว่าที่ควรจะเป็น และพบว่าอยู่ใน $O(h^5)$ แทนที่จะเป็น $O(h^4)$ และเมื่อเทียบกับ $O(h^3)$ ของ Trapezoidal Rule จะดีกว่ามาก ซึ่งค่า Error จะอยู่ในรูปของ(รายละเอียดการคำนวณจะไม่กล่าว ผู้สนใจขอให้ดูจาก Textbook) (Note:สำหรับ Multiple Segment ค่า Error จะเป็น $O(h^4)$ สำหรับ Simpson's Rule เทียบกับ $O(h^2)$ สำหรับ Trapezoidal Rule ถ้ากำหนดช่วง $[a,b]$ ให้คงที่)

$$E_t = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) = -\frac{h}{90} f^{(4)}(\xi); \quad h = \frac{(b-a)}{2}$$

โดยที่ ξ มีค่าอยู่ระหว่าง a และ b และในกรณีของ Multiple Application Simpson's Rule ค่า Error หาได้จากการรวมค่า Error ในแต่ละ Segment ทั้งหมด n Segment และค่าเฉลี่ยของ Forth Derivative ในช่วงนั้น ดังนั้น

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180n^4}\overline{f}^{(4)}$$

เนื่องจาก Simson's 1/3 Rule แม้ว่าจะเป็นแค่ Second Order Estimate เท่านั้น แต่มี Error ที่เทียบเท่า Third Degree Estimate(Simpson's 3/8 Rule ที่จะกล่าวต่อไป) ดังนั้นจะพบว่าวิธีนี้เป็นวิธีที่นิยมใช้มากที่สุด

Example 9.7 ใช้ Simson's 1/3 Rule ด้วยค่า $n = 4$ ทำการประมาณค่า Integral ของ

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วงจาก $a = 0$ จนถึง $b = 0.8$ จากนั้นคำนวณค่า True Error

Answer:

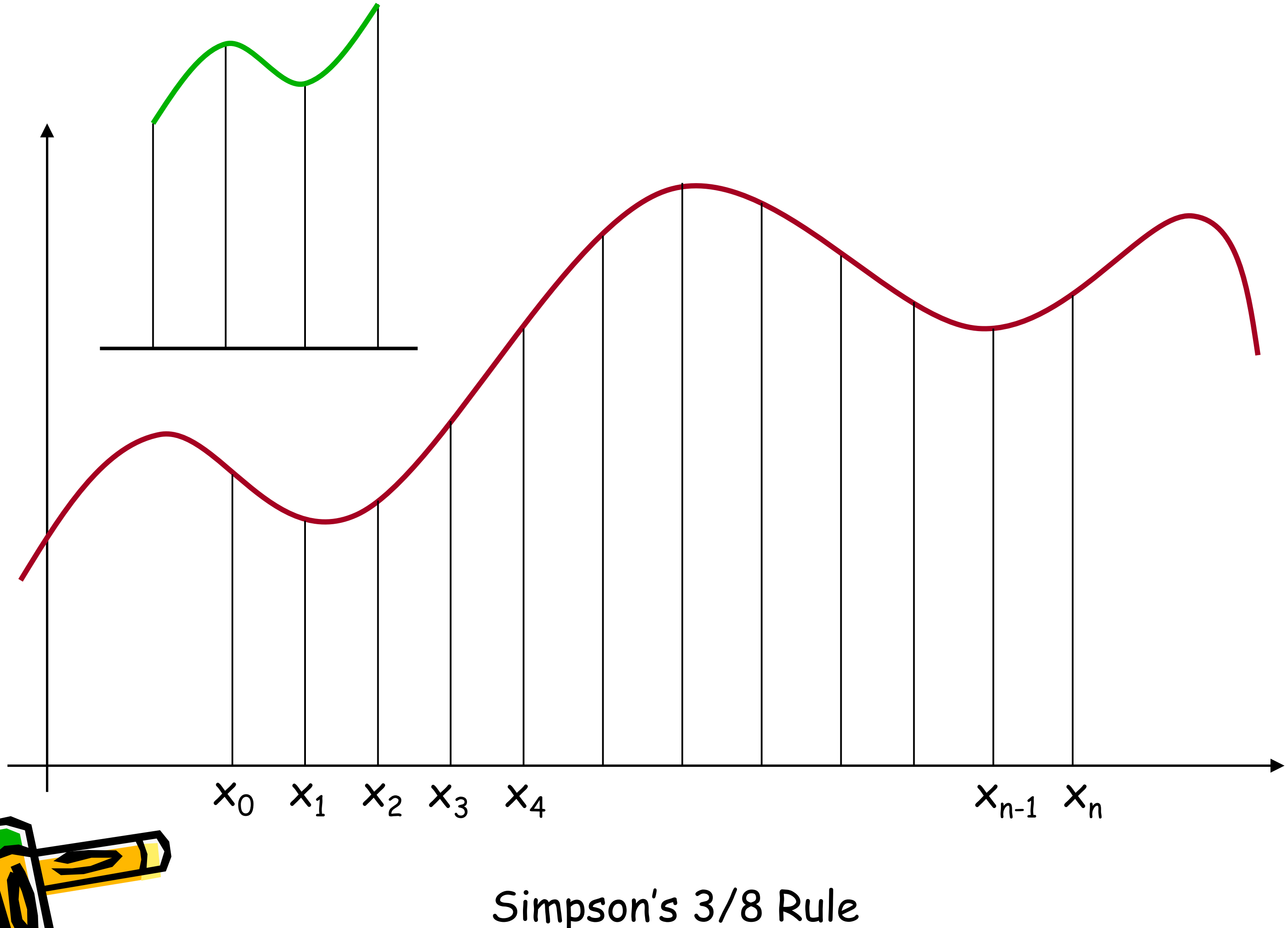
เราได้ $n = 4, h = 0.2$

$$f(0) = 0.2, \quad f(0.2) = 1.288, \quad f(0.4) = 2.456, \quad f(0.6) = 3.464, \quad f(0.8) = 0.232$$

$$I = 0.8\frac{0.2 + 4(1.288 + 3.464) + 2(2.456) + 0.232}{12} = 1.62346667$$

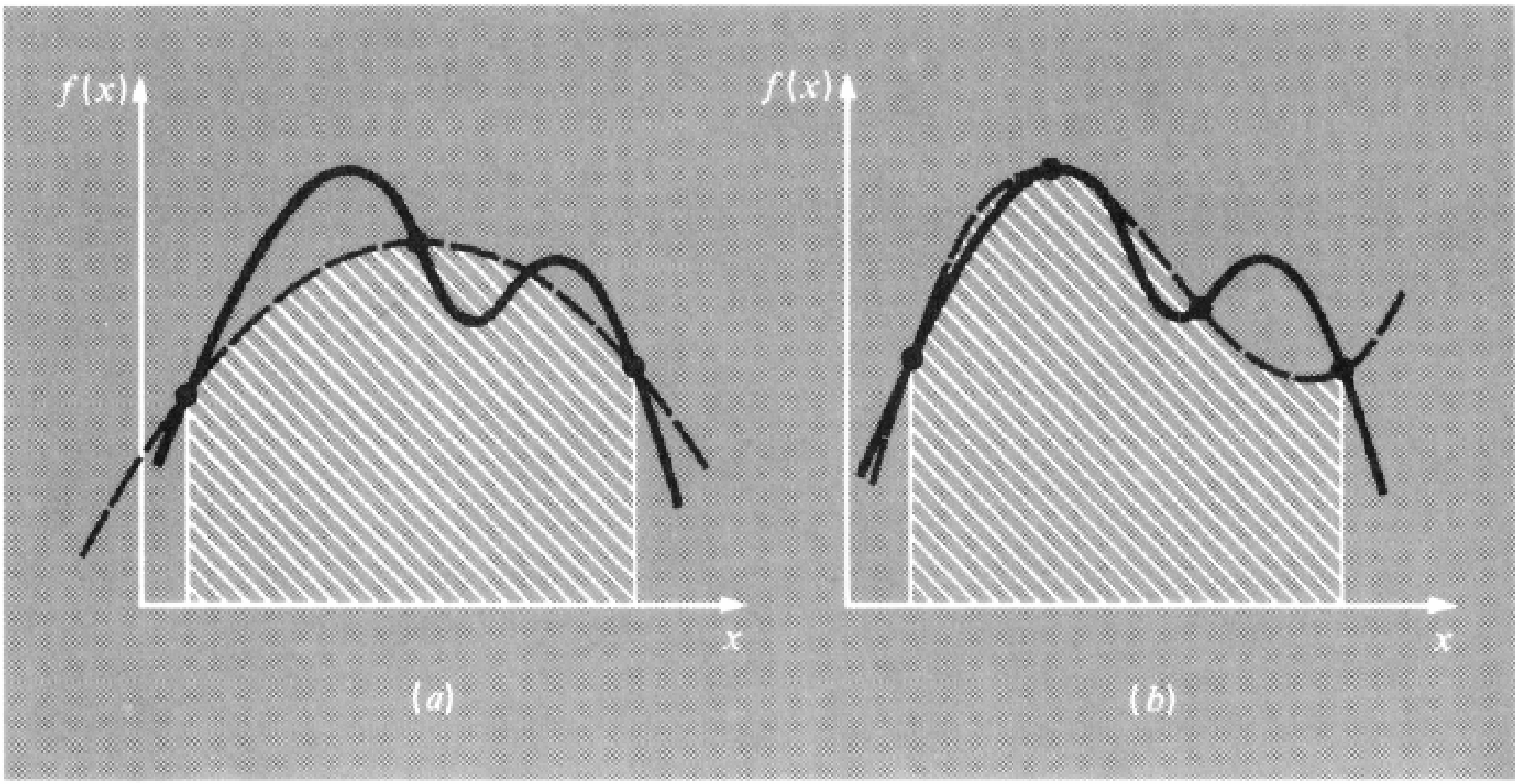
$$E_t = 1.64053334 - 1.62346667 = 0.01706667, \quad e_t = 1.04\%$$

Third-Order Approximation



Third Degree Approximation

รูปข้างล่างสาธิตการใช้ Parabola หรือ Second Degree Polynomial มาทำการประมาณค่า Integral ใน Simpson's 1/3 Rule(รูปซ้าย) เปรียบเทียบกับการใช้ Third Degree Polynomial ใน Simpson's 3/8 Rule(รูปขวา)



Simson's 3/8 Rule

9.4.4 Third-Order Approximation: Simpson's 3/8 Rule

ในกรณีนี้ เราใช้ Third Order Lagrange Polynomial มาประมาณค่า Integration

$$I = \int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_3(x)dx$$

และด้วยวิธีการคล้ายกันกับที่กล่าวในหัวข้อก่อน เราสามารถแสดงได้ว่าสมการข้างบนอยู่ในรูป

$$I \cong \frac{3h}{8}\left[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)\right]$$ **: Simson's 3/8 Rule**

Example 9.8 ใช้ Simson's 3/8 Rule ทำการประมาณค่า Integral ของ

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วงจาก $a = 0$ จนถึง $b = 0.8$ จากนั้นคำนวณค่า True Error จากนั้นเปรียบเทียบกับการใช้ Simson's 1/3 Rule ตามด้วย Simson's 3/8 Rule สำหรับในกรณีที่เราแบ่งเป็น 5 Segment

Answer:

กรณีของ Simson's 3/8 Rule เราแบ่งเป็น 4 Segment และได้

$$f(0) = 0.2, \quad f(0.2667) = 1.43272428, \quad f(0.5333) = 3.48717696, \quad f(0.8) = 0.232$$

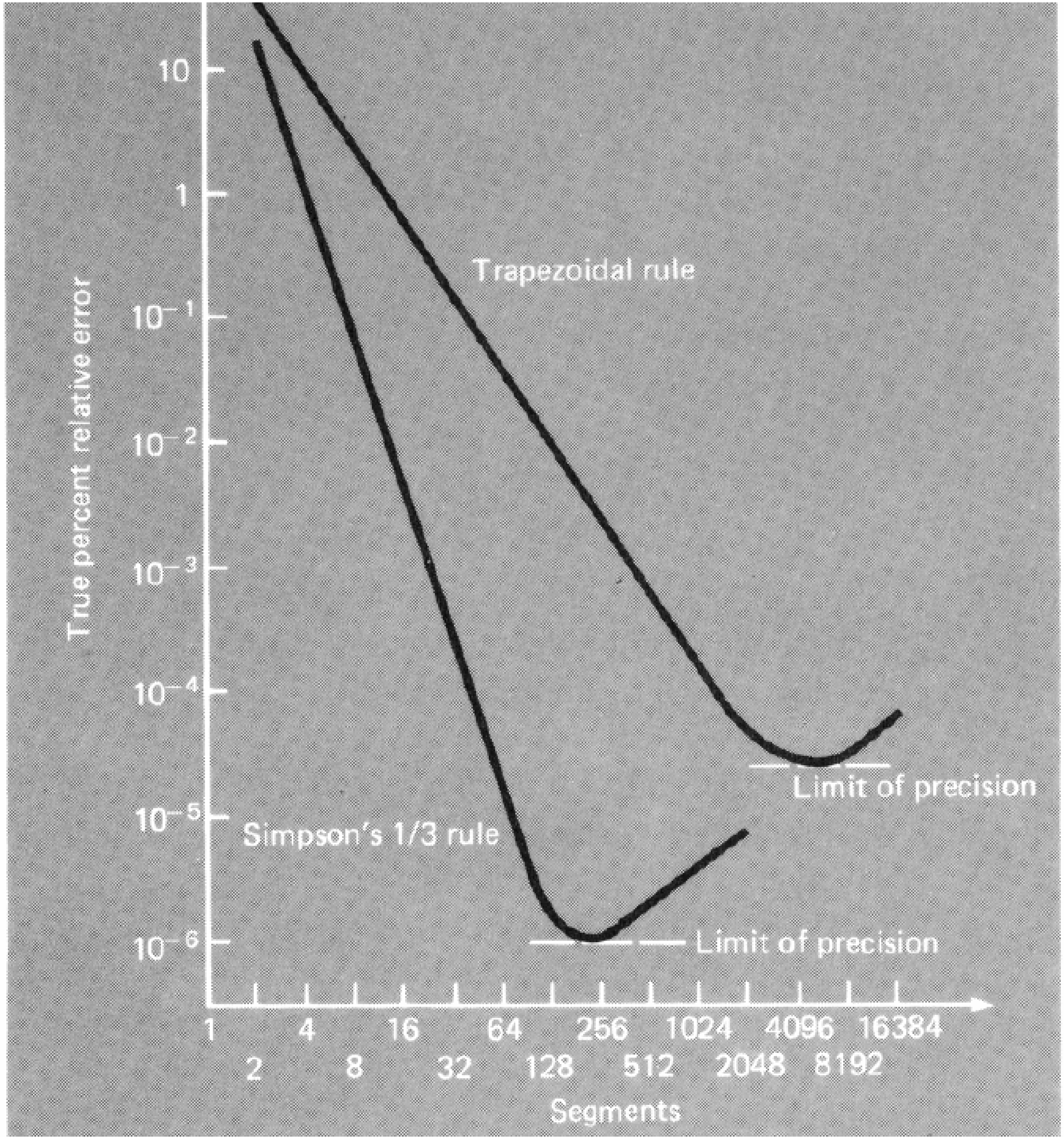
$$I \cong 0.8\frac{0.2 + 3(1.43272428) + 3(3.48717696) + 0.232}{8} = 1.51917037$$

$$E_t = 1.64053334 - 1.51917037 = 0.12136297, \quad e_t = 7.4\%$$

Romberg Integration

ในกรณีที่เรารู้ Function ที่เราต้องการหาค่า Integration เราสามารถนำ Trapezoidal Rule หรือ Simson's Rule มาใช้ได้ โดยการแบ่งช่วงที่ต้องการตามที่ต้องการ ยิ่งช่วงมีขนาดเล็ก หรือจำนวน Segment มีมาก ค่าของ Integral ที่ได้ก็จะยิ่งถูกต้องมากขึ้นเท่านั้น อย่างไรก็ตามถ้าเราแบ่งช่วงให้เล็กลงไปเรื่อยๆ จนถึงจุดหนึ่งที่ค่า Error กลับจะสูงขึ้น นั่นคือ Limit ที่ถูกกำหนดสำหรับแต่ละวิธี ซึ่งเป็นผลมาจาก Round Off Error

จากรูปแสดงกราฟเปรียบเทียบค่า Error ที่เกิดกับจำนวนของ Segment ที่ใช้ ระหว่าง Trapezoidal Rule และ Simpson's 1/3 Rule ของ Function $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$ ในช่วงตั้งแต่ $x = 0$ จนถึง $x = 0.8$ จะสังเกตได้ว่าค่า Limit ของ Precision ที่เกิดในแต่ละวิธี และจำนวน Segment ที่ดีที่สุดของแต่ละวิธี อันเนื่องมาจาก Round Off Error นั้นไม่เท่ากัน



10
1
10^{-1}
10^{-2}
10^{-3}
10^{-4}
10^{-5}
10^{-6}
True percent relative error
Trapezoidal rule
Simpson's 1/3 rule
Limit of precision
Limit of precision
1
4
16
64
256
1024
4096
16384
2
8
32
128
512
2048
8192
Segments

Romberg Integration

ในกรณีเช่นนี้ ถ้าเราต้องการความถูกต้องสูงๆ เราจำเป็นที่จะต้องใช้วิธีอื่นในการประมาณค่า ซึ่ง ***Romberg Integration*** เป็นเทคนิคหนึ่งที่นำมาใช้ได้ดี โดยใช้การทำ Trapezoidal Rule หลายๆครั้งติดต่อกันเขียนเป็น Algorithm การคำนวณจะใช้พื้นฐานมาจากวิธีของ ***Richardson Extrapolation*** ในการกำจัด Error สำหรับแต่ละครั้งที่ทำการคำนวณ

อีกวิธีหนึ่งคือวิธีที่เรียก ***Gauss Quadrature*** ซึ่งเป็นวิธีที่ปรับมาจากวิธีของ Newton-Cotes Formula เช่นกัน แต่ใช้วิธีการคำนวณสำหรับการหาค่าแต่ละช่วงที่ดีกว่า โดยมีการเลือกตำแหน่งของจุดที่เหมาะสมกว่า กรรมวิธีของ Gauss Quadrature จะไม่กล่าวในชั้นนี้ ผู้ที่สนใจสามารถศึกษาได้จากตำราของ Numerical Method ทั่วไป

Romberg Integration

9.5.1 Richardson's Extrapolation

วิธีการของ Richardson's Extrapolation จะใช้วิธีการของการ Estimate ค่า Integral สองอัน และมาเปรียบเทียบกับอันที่สาม เพื่อมาแก้ไข Error ที่เกิดขึ้น ซึ่งค่า Error ที่เกิดจากการทำ Multiple Application ของ Trapezoidal Rule สามารถเขียนในรูป

$$I = I(h) + E(h)$$

โดยที่ I คือค่า Integral ที่แท้จริง, $I(h)$ คือค่าประมาณของ Integral ที่ได้จากการทำ n Segment โดย $h = (b-a)/n$ และ $E(h)$ เป็น Truncation Error ที่เกิด ดังนั้นถ้าเราทำการ Estimate สองครั้งโดยใช้ช่วงห่างไม่เท่ากัน คือ h_1 และ h_2 เราสามารถเขียน

$$I = I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

จากที่กล่าวมาแล้วว่าค่า Estimate Error จากการทำ Multiple Application ของ Trapezoidal Rule จะอยู่ในรูป

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12n^2}\bar{f}''$$

Romberg Integration

เมื่อแทนค่า $n = (b-a)/h$ เราได้ค่า Estimate Error เป็น

$$E_a = -\frac{b-a}{12} h^2 \overline{f}''$$

ดังนั้น เราสรุปได้ว่า อัตราส่วนระหว่าง Error ทั้งสอง Estimate จะมีค่าประมาณเป็น

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

หรือ

$$E(h_1) \approx E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

และเมื่อแทนค่ากลับลงในสมการเดิม เราได้

$$I = I(h_2) + E(h_2) \approx I(h_1) + E(h_2)\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$$

Romberg Integration

และเมื่อจัดเรียงสมการใหม่ เพื่อหาค่า $E(h_2)$ เราจะได้

$$E(h_2) \approx \frac{I(h_1) - I(h_2)}{1 - (h_1 / h_2)^2}$$

และท้ายสุด เราสามารถนำค่าดังกล่าวมาปรับปรุงการ Estimate ในครั้งที่สองได้เป็น

$$I = I(h_2) + E(h_2) \approx I(h_2) + \left[\frac{1}{(h_1 / h_2)^2 - 1}\right][I(h_2) - I(h_1)]$$

เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่า ค่า Error ที่ได้จากการ Estimate นี้มี $O(h^4)$ ซึ่งได้จากการรวม Trapezoidal Rule สองอัน แต่ละอันมี $O(h^2)$ เข้าด้วยกัน ในกรณีที่เราใช้ระยะห่างของแต่ละจุดเท่าๆกัน จุดที่เหมาะสมคือที่ $h_2 = h_1 / 2$ และสมการข้างบนจะเป็น

$$I \approx I(h_2) + \frac{1}{2^2 - 1}[I(h_2) - I(h_1)] = \frac{4}{3} I(h_2) - \frac{1}{3} I(h_1)$$

Example 9.9 จาก Function เดิม เปรียบเทียบการทำ Trapezoidal Rule โดยใช้วิธีของ Error Correction กับวิธีปกติ

$$f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$$

ในช่วงจาก $a = 0$ จนถึง $b = 0.8$

Answer:

ในตัวอย่างก่อนๆ เราทำ Single Application และ Multiple Application โดยใช้ Trapezoidal Rule ของ Function นี้มาแล้ว ซึ่งผลสรุปในตารางข้างล่าง

Segment	h	Integral	e_t, %
1	0.8	0.1728	89.5
2	0.4	1.0688	34.9
4	0.2	1.4848	9.5

ในการ Estimate จาก หนึ่งและสอง Segment เราได้

$$I \approx \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.36746667$$

$$E_t = 1.64053334 - 1.36746667 = 0.27306667, \quad e_t = 16.6\%$$

Romberg Integration

ในการ Estimate จาก หนึ่งและสอง Segment เราได้

$$I \approx \frac{4}{3}(1.0688) - \frac{1}{3}(0.1728) = 1.36746667$$

$$E_t = 1.64053334 - 1.36746667 = 0.27306667, \quad e_t = 16.6\%$$

สำหรับการ Estimate จาก สองและสี่ Segment เราได้

$$I \approx \frac{4}{3}(1.4848) - \frac{1}{3}(1.0688) = 1.62346667$$

$$E_t = 1.64053334 - 1.62346667 = 0.01706667, \quad e_t = 1.0\%$$

Romberg Integration

วิธีการของ Richardson's Extrapolation สามารถนำมาทำต่อ โดยใช้การ Estimate ที่ได้ใน $O(h^4)$ ที่กล่าวมาแล้วสองอัน มาทำการ Estimate ใหม่อีกหน ซึ่งจะให้ความถูกต้องยิ่งขึ้นไปอีกใน $O(h^6)$ ในกรณีที่เราใช้ค่าระยะห่างแต่ละจุดเท่าๆกัน ซึ่งการ Estimate แต่ละครั้งเราใช้ขนาดของ Step เป็นครึ่งหนึ่งของอันเดิม สมการของ $O(h^6)$ สามารถพิสูจน์ได้ว่าอยู่ในรูป

$$I \approx \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l$$

โดยที่ I_m คือค่าการ Estimate ที่ถูกต้องมากกว่า และ I_l คือการ Estimate ที่ถูกต้องน้อยกว่า(ใช้ Step Size ขนาดใหญ่กว่าเป็นสองเท่า) ในทำนองเดียวกันถ้าเราทำต่อไปอีก โดยการรวมสอง Estimate ที่มี $O(h^6)$ เราจะได้ค่า Estimate ที่มีความถูกต้องใน $O(h^8)$ และสามารถแสดงเป็นสมการสำหรับกรณีที่ Step Size เท่ากัน เป็น

$$I \approx \frac{64}{63} I_m - \frac{1}{63} I_l$$

Romberg Integration

Example 9.10 ทดลองใช้การ Estimate ใน $O(h^6)$ สำหรับข้อมูลในตัวอย่างที่ 9.9 และเปรียบเทียบ Error

Answer:

เราได้ $I \approx \frac{16}{15} I_m - \frac{1}{15} I_l = \frac{16}{15}(1.62346667) - \frac{1}{15}(1.36746667) = 1.64053334$

สังเกตว่าในกรณีนี้เราได้คำตอบที่ถูกต้องถึงตัวเลขนัยสำคัญ 9 หลัก

Romberg Integration

จากที่กล่าวในหัวข้อก่อน ในการปรับปรุงค่าของ Integration ให้ดีขึ้นเรื่อยๆสำหรับแต่ละ Step สำหรับการใช้ระยะห่างแต่ละจุดที่เท่าๆกัน และเป็นครึ่งหนึ่งของ Step ก่อนหน้านี้ ซึ่งเราสามารถเขียนเป็นสมการทั่วไปได้ในรูปของ

$$I_{j,k} \approx \frac{4^{k-1} I_{j+1,k-1} - I_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

โดยที่ $I_{j+1,k-1}$ และ $I_{j,k-1}$ คือค่า Integration ที่ถูกต้องมากกว่า และถูกต้องน้อยกว่า ตามลำดับ ที่ได้ก่อนหน้านี้ ส่วนค่า $I_{j,k}$ คือค่า Estimate อันใหม่ โดยที่เมื่อ $k=1$ เราได้ Trapezoidal Rule เดิม, ส่วน $k=2$ หมายถึงการ Estimate อันใหม่ที่เป็น $O(h^4)$ และ $k=3$ คือการ Estimate ที่เป็น $O(h^6)$ และต่อไปเรื่อยๆ สำหรับค่า j ใช้เพื่อแสดงถึงความแตกต่างของการ Estimate สองครั้งมี่มีความถูกต้องมากกว่า $(j+1)$ และน้อยกว่า (j) ของการใช้ Trapezoidal Rule เริ่มจาก Single Segment Application, 2 Segment, 4 Segment และต่อไปเรื่อยๆ

Romberg Integration

	$O(h^2)$	$O(h^4)$	$O(h^6)$	$O(h^8)$
(IT =1)	0.17280000	1.36746667		
	1.06880000			
(IT =2)	0.17280000	1.36746667	1.64053334	
	1.06880000	1.62346667		
	1.48480000			
(IT =3)	0.17280000	1.36746667	1.64053334	1.64053334
	1.06880000	1.62346667	1.64053334	
	1.48480000	1.63946667		
	1.60080000			

จากรูปข้างบน สังเกตว่า $I_{4,1}$ ได้ค่าที่ถูกต้องแล้วในระดับ 9 Significant Digit และเมื่อเปรียบเทียบกับวิธีการเดิม จากรูปกราฟที่แสดงให้ดูก่อนหน้านี้ พบว่า Simpson's 1/3 Rule ต้องใช้ถึง 256 Segment ที่จะได้ค่า Estimate เป็น 1.64053332 และเราจะไม่ได้ค่าที่ดีกว่านี้เนื่องมาจาก Round Off Error ในขณะที่ Romberg Integration ได้ค่าที่ถูกต้อง(ถึง 9 หลัก) โดยใช้พื้นฐานจากการรวมกันของ 1, 2, 4, และ 8-Segment Trapezoidal Rule

Summary

Method	Data Points Required for One Application	Data Points Required for n Application	Truncation Error	Application	Programming Effort	Comments
Trapezoidal Rule	2	$n+1$	$\cong h^3 f''(\xi)$	Wide	Easy	
Simpson's 1/3 Rule	3	$2n+1$	$\cong h^5 f^{(4)}(\xi)$	Wide	Easy	
Simpson's 1/3 and 3/8 Rule	3 or 4	≥ 3	$\cong h^5 f^{(4)}(\xi)$	Wide	Easy	
Higher-Order Newton-Cotes	5 or More	N/A	$\geq h^7 f^{(6)}(\xi)$	Rare	Easy	
Romberg Integration	3			Requires $f(x)$ Be Known	Moderate	ไม่เหมาะกับ Data ที่เป็นตาราง
Gauss Quadrature	2 or More	N/A		Requires $f(x)$ Be Known	Easy	ไม่เหมาะกับ Data ที่เป็นตาราง

Homework 10: Ch 11

- Download HW
- Next Week
  - ส่งการบ้าน HW 10
  - Chapter 11 Solutions of ODE
  - HW 11 (Option)